

Методические рекомендации по  
подготовке к ГАК  
*для студентов специальности «физика»*

*Емельянов Эдуард Владимирович*

*Емельянова Алёна Викторовна*



# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>Механика</b>	<b>11</b>
1 Кинематика Материальной точки и Абсолютно твердого тела . . .	12
2 Динамика материальной точки . . . . .	16
3 Канонические уравнения Гамильтона . . . . .	23
4 Законы сохранения . . . . .	25
5 Законы изменения и сохранения механической энергии . . . . .	28
6 Законы изменения и сохранения момента импульса . . . . .	33
7 Неинерциальные системы отсчета . . . . .	36
8 Основы Специальной Теории Относительности . . . . .	41
9 Динамика абсолютно твердого тела . . . . .	46
10 Деформации . . . . .	54
11 Механика жидкостей и газов . . . . .	58
12 Движение вязкой жидкости . . . . .	64
13 Колебательное движение . . . . .	71
14 Вынужденные колебания . . . . .	77
15 Волны в сплошной среде и элементы акустики . . . . .	79
<b>Молекулярная физика и термодинамика</b>	<b>87</b>
16 Статистический подход к описанию молекулярных явлений . . . .	88
17 Идеальный газ . . . . .	92
18 Статистика идеального газа . . . . .	97
19 Теория флуктуаций . . . . .	102
20 Брауновское движение . . . . .	104
21 Термодинамический подход к описанию молекулярных явлений	111
22 Теплоемкость системы . . . . .	114
23 Начала термодинамики . . . . .	118
24 Реальные газы . . . . .	125

25	Термодинамические потенциалы . . . . .	131
26	Твердые тела . . . . .	136
27	Фазовые переходы . . . . .	141
28	Явления переноса . . . . .	145
29	Жидкое и плазменное состояния вещества . . . . .	150
<b>Электричество и магнетизм</b>		<b>159</b>
30	Электростатическое поле . . . . .	160
31	Потенциальность электрического поля . . . . .	163
32	Проводники в электростатическом поле . . . . .	166
33	Диэлектрики в электрическом поле . . . . .	168
34	Электронная теория поляризации диэлектриков . . . . .	171
35	Постоянный электрический ток . . . . .	175
36	Квазистационарное приближение в электродинамике . . . . .	179
37	Магнитное поле квазистационарных токов . . . . .	181
38	Магнитное поле в сплошной среде . . . . .	185
39	Магнетики . . . . .	187
40	Явление электромагнитной индукции . . . . .	194
41	Электромагнитные колебания в контуре . . . . .	196
42	Механизмы электропроводности твердого тела . . . . .	202
43	Основы квантовой теории твердого тела . . . . .	207
44	Уравнения Максвелла . . . . .	215
45	Релятивистская динамика и кинематика . . . . .	219
46	Электродинамика движущихся сред . . . . .	226
47	Плоские электромагнитные волны в прозрачном веществе . . . . .	230
48	Явление интерференции . . . . .	238
49	Явление дифракции . . . . .	244
50	Дифракция в оптических приборах и спектральный анализ . . . . .	253
51	Дисперсия диэлектрической проницаемости . . . . .	256
52	Поляризация света, граничные эффекты . . . . .	260
53	Оптическое излучение . . . . .	267
54	Излучение света атомами и молекулами . . . . .	270

---

55	Дуализм явлений микромира . . . . .	274
<b>Атомная и ядерная физика, элементарные частицы</b>		<b>281</b>
56	Элементарная теория атома водорода . . . . .	282
57	Основы квантовой механики . . . . .	289
58	Одномерные квантовомеханические задачи . . . . .	295
59	Одноэлектронный атом . . . . .	303
60	Многоэлектронные атомы . . . . .	306
61	Атом во внешнем поле . . . . .	314
62	Химическая связь. Молекулы . . . . .	320
63	Основы квантовой теории твердого тела . . . . .	325
64	Представление о квазичастицах . . . . .	332
65	Идеальные системы в статистической механике . . . . .	337
66	Физическая кинетика . . . . .	340
67	Свойства атомных ядер . . . . .	348
68	Радиоактивность . . . . .	357
69	Нестационарная теория возмущений . . . . .	362
70	Нуклон–нуклонное взаимодействие . . . . .	365
71	Частицы и взаимодействия . . . . .	372
72	Сильные и слабые взаимодействия . . . . .	381
73	Нуклеосинтез . . . . .	386
74	Взаимодействие частиц с веществом . . . . .	389
<b>Список сокращений</b>		<b>398</b>
<b>Основные постоянные</b>		<b>401</b>
<b>Важнейшие формулы векторного анализа</b>		<b>403</b>
<b>Связь между некоторыми единицами</b>		<b>405</b>
<b>Литература</b>		<b>406</b>
<b>Предметный указатель</b>		<b>408</b>



## Введение

Данные методические рекомендации составлены с учетом основных требований от студентов специальности «физика» к знанию материала специализации. Раскрытые в пособии вопросы взяты из содержания теоретической части билетов государственного экзамена по физике за период 2003–2007 гг. В оглавлении указаны наименования вопросов к государственному экзамену по состоянию на 2003 г. Ввиду внесения некоторых изменений в программу экзамена, ссылки на часть вопросов, ставших самостоятельными в программе 2007 г., выделены в предметном указателе жирным шрифтом.

Основной материал разделен в данной книге на четыре крупные части:

- механика (основы механики, специальной теории относительности и теории колебаний);
- молекулярная физика и термодинамика (статистический и термодинамический подходы к описанию молекулярных явлений; физика газов, твердых тел и жидкостей);
- электричество и магнетизм (статическое и динамическое электромагнитное поле, релятивистские эффекты, оптика, основы корпускулярно-волнового дуализма);
- атомная и ядерная физика, элементарные частицы (основы квантовой механики; физика молекул, атомов и атомных ядер; основные взаимодействия; симметрия и суперсимметрия в квантовой физике).

Для обозначения часто употребляемых терминов в пособии применяются сокращения. Первое появление термина расшифровывается целиком, в скобках указывается его сокращенное обозначение, далее используются только сокращения. Все глобальные (используемые более чем в одном подпункте) сокращения вынесены в список сокращений.

Отдельно в книге обозначен список наиболее часто употребляемых постоянных величин. Значения постоянных приведены в системе СИ, значения некоторых постоянных приведены также в системе СГС (величины, значения которых элементарно переводятся из системы СИ в СГС или же отсутствуют

в СГС, обозначены только в СИ).

Так как теоретическая физика широко оперирует формулами векторного и тензорного анализа, основные из них также вынесены в отдельное приложение. Это — важнейшие векторные операторы и действия над ними и основные интегральные теоремы.

Еще одним приложением является список связи важнейших единиц измерения в физике в различных системах (в основном, это СИ и СГС).

В списке литературы перечислены основные источники, из которых черпалась информация для составления данной книги. Особого упоминания заслуживает электронная библиотека Wikipedia: несмотря на то, что русскоязычное зеркало значительно отстает от англоязычного, данная библиотека (а точнее — самый большой в мире электронный учебник) содержит огромное количество статей по всем отраслям физики (в т.ч. и по многим спорным вопросам, например: теория суперструн и Великого объединения). Хорошим «бумажным» аналогом Википедии является «Физическая энциклопедия» в пяти томах. Несмотря на двадцатилетнюю давность данного издания, в нем отражено огромное количество актуальных и по сей день проблем физики. Более современные вопросы (например, осцилляция нейтрино) не входят и во многие современные учебники, поэтому проявивших к ним интерес отсылаем к Википедии и современным физическим журналам (много свежей информации можно найти в журнале «Успехи физических наук», <http://ufn.ru>).

В предметном указателе содержатся основные термины, встречающиеся в пособии. Указатель построен по принципу основного понятия (чаще всего это существительное), т.е. например, для термина «Брауновское движение» основным будет понятие «движение», однако, некоторые термины (встречающиеся единожды, либо относящиеся к заголовку отдельного вопроса) построены в порядке следования слов в определении, например, «Кинетическое уравнение Больцмана», «Магическое число». Дублирование записей (типа «Матрица → Дирака» и «Дирака → Матрица») в предметном указателе не производится (иначе его объем мог бы сравняться с объемом основного материала), поэтому понятие, состоящее из нескольких слов, следует искать по

следующему алгоритму. Вначале следует произвести поиск по основному термину, затем, если он не встречается в указателе, по второстепенному, а затем, если и второстепенный термин не обозначен явно, по определяющему выражению. Например, для поиска термина «Магнитное число Рейнольдса» в качестве основного следует выбрать слово «число», второстепенным термином является «Рейнольдса», а определяющим — «магнитное». Иначе: для поиска термина «Элементарная ячейка» в качестве основного термина логично выбрать «ячейка», однако, ссылка на данное слово в указателе отсутствует. Для поиска переходим на второстепенный термин — «элементарная», и находим в указателе ссылку на данный термин.

При подготовке данного пособия использовалась система профессиональной вёрстки документов  $\text{\LaTeX}$  в операционной системе Linux. Большинство иллюстраций создавалось в открытой САД-системе QCad, некоторая часть — в графопостроителе функций KmPlot.



# Механика

# 1 Кинематика Материальной точки и Абсолютно твердого тела (АТТ)

## Способы описания движения

**Естественный** — использует траекторию. Движение характеризуется координатой  $S : S = S(t)$  (скаляр). **Траектория** — линия, вдоль которой перемещается тело. Необходимы: тело отсчета, прибор отсчета времени, система координат.

**Координатный** — 3 координаты: прямоугольная и криволинейная системы координат. Переход от одной системы к другой — по формулам  $x = \varphi(q_1)$ ,  $y = \psi(q_2)$ ,  $z = \xi(q_3)$ .

**Радиус-векторный** — выбирается точка отсчета — полюс, из которого к нашей материальной точке (МТ) проводится радиус-вектор (РВ).  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Аналогично в сферической системе координат  $(r, \varphi, \theta)$ .

## Закон движения

Движение МТ полностью определено, если законы движения:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ( $s = s(t)$ ;  $x, y, z = x, y, z(t)$ ) — кинематические уравнения движения.

Закон движения МТ может быть задан аналитически, графически или в виде таблицы. Ан. — в виде уравнений, гр. — график, табл. — расписание.

## Линейные и угловые скорости и координаты

**Скорость** — производная РВ МТ по времени ее движения:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ , или  $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$  — линейная скорость.

Угловой координате  $\vec{\varphi}$  соответствует угловая скорость  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  ( $\vec{\varphi}$  — псевдовектор). Т.к.  $dS = R d\varphi$ , то  $\omega = \frac{v}{R}$ ,  $v = \omega R$ . В общем случае  $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$ .

Скорость тела в любой момент можно разложить на поступательную составляющую центра тяжести ( $\vec{v}_C$ ) и вращательную вокруг некоего мгновенного центра вращения ( $\vec{\omega} \times \vec{R}$ ):  $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$ .

Скорость в различных способах представления:

**Естественный:**  $v = \frac{dS}{dt}$ ; **координатный:**  $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ ; **радиус-векторный:**  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

**Ускорением** называют величину, определяющую быстроту изменения скорости.

*Естественный:*  $a = \frac{dv}{dt}$ ; *координатный:*  $a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2}$ ; *радиус-векторный:*  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

В любой точке траектории ускорение можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{\tau}, \vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\theta} \vec{n}.$$

Следовательно,  $a_\tau = \dot{v}$ ,  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ,  $\left( \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} \cdot v = \frac{v}{R} \right)$ .

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v})^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

Преобразование координат: 
$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \theta. \end{cases}$$

Угловое ускорение:  $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\varphi}}$ , т.к.  $v = \omega R$ , то  $a_n = \omega^2 R$ ;  $a_\tau = R \cdot \frac{dv}{Rdt} = R \cdot \dot{\omega} = \beta R \Rightarrow a = R \cdot \sqrt{\omega^4 + \beta^2}$ .

## Система МТ (СМТ)

СМТ — совокупность МТ, связанных силами внутреннего взаимодействия и рассматриваемая как единое целое.

Характеристики системы: масса,  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ , скорость,  $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ , ускорение,  $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ .

РВ, скорость и ускорение центра масс (ЦМ):  $\vec{R}_c = \frac{1}{m} \sum \vec{r}_i m_i$ ;  $\vec{v}_c = \dot{\vec{R}}_c$ ;  
 $\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c$

Действующая на систему сила:  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i^{ext} + \sum \vec{F}_{ij}^{int} = \sum \vec{F}_i^{ext} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i$ ;

$$M \sum \vec{a}_c = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{a}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i.$$

## Теорема о движении центра масс

В нерелятивистской механике ввиду независимости массы от скорости, импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центр масс** – воображаемая точка, чей РВ выражается формулой  $\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$ . Где  $m$  – общая масса системы. Дифференцируя, получим **теорему о движении**

ЦМ:  $m \vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$  и  $\boxed{m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext}}$ .

## Степени свободы АТТ

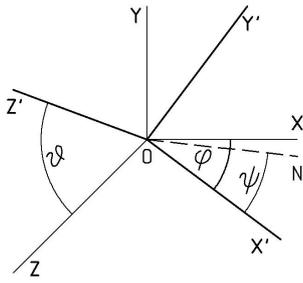
Тело, положение и движение которого ничем не определено, называется **свободным** (в противном случае — несвободным). **Связи** — наложенные на положение и движение тела ограничения. *Внутренние связи* не накладывают ограничения на движение системы как целого. Свобода системы определяется лишь *внешними* связями.

Любую связь можно заменить соответствующей силой (**сила реакции связи**). Эти силы пассивны. Полное число независимых величин (координат), которые нужно задать для определения состояния системы — число **степеней свободы**,  $i$ .

Для любой системы  $n$  точек,  $i_{\text{сист}} = \sum i_j - N_{\text{св}} = 3n - N_{\text{св}}$ . Для любого АТТ  $i \leq 6$ .

## Разложение движения на слагаемые. Углы Эйлера

Пусть нам даны неподвижная система  $XYZ$  и подвижная  $X'Y'Z'$ .



Положение АТТ можно задать, зная положение точки  $O'$  и 9 углов:  $(\vec{OX}, \vec{O'X'})$ ,  $(\vec{OX}, \vec{O'Y'})$ , ... Но, т.к. направляющие косинусы связаны между собой, необходимо знать лишь *три* угла (совместим условно  $O$  и  $O'$ ):

$ON$  — линия узлов (прямая пересечения плоскостей  $XOY$  и  $X'O'Y'$ ),  $O'$  — полюс;  $\varphi = \angle XOX'$  — **угол прецессии**

(изменяется при повороте вокруг  $OZ$ ),

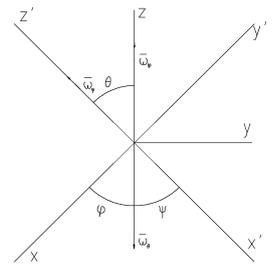
$\psi = \angle NOX'$  — **угол собственного вращения** (при вращении вокруг  $O'Z'$ ),

$\theta = \angle ZOZ'$  — **угол нутации** (вращение вокруг  $O'Z'$ ).

Таким образом, 6 независимых величин:  $x_0, y_0, z_0$  и  $\varphi, \psi, \theta$  однозначно определяют положение твердого тела. Если при движении эти углы не изменяются, тело движется поступательно.

Так как  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , то  $v_{x'} = \omega_{y'}z' - \omega_{z'}y'$ , ...,  $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$ ,  $\omega_\theta = \dot{\theta}$ ,  $\omega_\psi = \dot{\psi}$ .  $\omega_{\varphi x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi$ ;  $\omega_{\varphi y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi$ ;  $\omega_{\varphi z'} = \dot{\varphi} \cos \theta$ ;  $\omega_{\psi x'} = \omega_{\psi y'} = 0$ ;  $\omega_{\psi z'} = \dot{\psi}$ ;  $\omega_{\theta x'} = \dot{\theta} \cos \psi$ ;  $\omega_{\theta y'} = -\dot{\theta} \sin \psi$ ;  $\omega_{\theta z'} = 0$ ;  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases}$$



## Поступательное, вращательное и плоское движение ТТ, мгновенная ось вращения

При поступательном движении любая плоскость, проведенная в теле, остается параллельной себе. Эйлеравы углы остаются постоянными, изменяется лишь  $\vec{r}_c$ .

Таким образом,  $\vec{v}_i = \vec{v}_c(t)$ ;  $\vec{a}_i = \vec{a}_c(t)$ ;  $i_{\text{пост}} = 3$ .

При плоском движении  $i = 2$ , все точки тела движутся параллельно какой-либо плоскости, поэтому удобно связать систему координат (СК) с ней, направив ось  $OZ$  перпендикулярно этой плоскости. Тогда при движении изменяются лишь координаты  $x_i$  и  $y_i$ . При вращательном движении постоянными

остаются координаты  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$ , изменяются  $\varphi, \psi, \theta (i = 3)$ . Удобно вводить угловые координаты, скорости и ускорения. Любое движение можно разложить на поступательное и вращательное.

**Теорема:** *в любой момент времени распределение скоростей между точками тела таково, каким оно было бы при вращении тела вокруг неподвижной оси вращения.*

Или: в любой момент времени можно провести прямую, проходящую через неподвижную точку тела так, что все точки прямой в данный момент времени имеют нулевую скорость. (*мгновенная ось вращения* тела).

Мгновенной осью можно пользоваться лишь для описания мгновенного распределения скоростей, но не ускорений. Так как  $v = \omega \cdot R$ , то  $R = \frac{v}{\omega}$  – радиус-вектор точки от мгновенной оси.

## 2 Динамика материальной точки

**Понятие массы, импульса и силы в механике Ньютона.**

### Законы Ньютона

Механика Ньютона работает с инерциальными СО. **Инерциальной** называется такая СО, в которой изолированная МТ находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Т.к. **закон инерции** выполняется не во всех СО, то его формулируют так: *существуют такие СО, в которых МТ находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.* Такие СО называются *инерциальными*.

**Первый закон Ньютона:** *всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами это состояние изменить.*

Инертность имеет меру – **массу**. Вводится понятие **силы** – векторной физической величины, характеризующей действие на тело других тел, в ре-

зультате чего тело получает ускорение или деформируется.

**Второй закон Ньютона** (динамическое уравнение движения): *изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует*,  $\Delta \vec{k} = \mathfrak{C} \vec{F} \Delta t$ , удобно положить  $\mathfrak{C} = 1$ , т.е.  $\Delta \vec{k} = \vec{F} \Delta t$ .

Вводится понятие **количества движения** (импульс тела):  $\vec{k} = \vec{p} = m\vec{v}$ .

Итак,  $\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$ , переходя к бесконечно малым:  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$  (в нерелятивистских СО !!!). Т.о. получаем, что для двух тел, испытывающих действие одной и той же силы:  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1$ , т.е., положив  $m_1$  за эталон, можем определить  $m_2$ .

Такая масса называется **инертной**,  $m_{\text{ин}}$ . Если же определить массу при помощи взвешивания, она получит название **гравитационной**,  $m_{\text{грав}}$ .

**Принцип эквивалентности** гласит, что  $m_{\text{грав}} = m_{\text{ин}}$ .

Кроме импульса тела вводится понятие **импульса силы**:  $\vec{i} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ , т.о.,  $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{i}$ , или, в дифференциальной форме,  $\vec{d}p = \vec{F} dt$ , т.е.  $\vec{d}p = \vec{d}I$ .

**Третий закон Ньютона**: *действие всегда есть равное и противоположное противодействие*. Иначе: силы взаимодействия двух тел друг с другом равны и направлены в противоположные стороны,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Необходимым дополнением законов Ньютона является **принцип суперпозиции** сил: ускорение, полученное МТ при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений, полученных МТ при действии каждой из этих сил в отдельности. Или: существует **равнодействующая сила**, равная геометрической сумме приложенных сил:  $\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N F_i$ .

Связь законов Ньютона со свойствами ПВ: 1) однородность и изотропность пространства и однородность времени, 2) однородность, изотропность и зеркальная симметрия пространства.

## Уравнения движения. Начальные условия

Запишем основное уравнение динамики в дифференциальной форме:  $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ . В механике рассматриваются 2 рода задач:

1) по заданному кинематическому уравнению движения  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  определить приложенную к телу силу. Разложим  $\vec{r}(t)$  на компоненты:  $x(t), y(t), z(t) \Rightarrow m\ddot{x} = F_x, \dots$ . Дифференцируя дважды по  $t$  уравнения движения, получим силу  $\vec{F}(t)$ . Эта задача всегда имеет решение и не требует сложных математических методов.

2) По известному силовому полю  $\vec{F}(r)$  определить закон движения точки. Здесь получаются уравнения вида  $m\ddot{x}_i = F_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ . Имея три уравнения второго порядка, получим 6 постоянных интегрирования:  $x_i = x_i(t, c_1, \dots, c_6)$ .

Чтобы вторая задача имела определенное решение, необходимы *начальные условия*:  $x_i|_{t=0} = x_{i0}; \dot{x}_i|_{t=0} = \dot{x}_{i0}$ . Тогда получим две системы уравнений:  $x_{0_i} = x_{0_i}(0, c_1, \dots, c_6), \dot{x}_{0_i} = \dot{x}_{0_i}(0, c_1, \dots, c_6)$ . Из этих систем найдем постоянные  $c_1, \dots, c_6$ . Уравнение движения МТ получим в виде  $x_i = f_i(t, x_{i0}, \dot{x}_{i0})$ . Таким образом, вторая задача динамики является полностью решаемой.

В некоторых случаях можно ограничиться нахождением неполного уравнения движения, т.е. ограничиться некоторыми первыми интегралами движения:  $c_{1, \dots, 5} = \varphi_{1, \dots, 5}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); c_6 = \varphi_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ . В первых пяти от времени избавились. Знание хотя бы одного интеграла движения позволяет понизить на один порядок системы ДУ.

## Центральные силы

Сила называется **центральной**, если она направлена к одной и той же точке (**центру сил** или *силовому центру*) и зависит только от расстояния до него. Например, гравитационная сила.

## Вариационный принцип Гамильтона

Одним из основных понятий механики является понятие **материальной точки** (МТ) — тела, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Для определения положения системы из  $N$  МТ (СМТ) в пространстве необходимо задать  $3N$  координат. Вообще, число независимых величин, задание которых однозначно определяет состояние системы, называется **степенями свободы** этой системы.

Любые  $s$  величин  $q_1, \dots, q_s$ , вполне характеризующие положение системы, называют ее **обобщенными координатами**, а производные  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  — **обобщенными скоростями**. Соотношения, связывающие ускорения частиц с их координатами и скоростями, называют **уравнениями движения**.

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается *принципом наименьшего действия* (**принцип Гамильтона**): *каждая механическая система характеризуется определенной функцией обобщенных координат, скоростей и времени,  $L = L(q; \dot{q}; t)$ , а движение системы удовлетворяет наименьшему значению интеграла*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt.$$

Функция  $L$  называется **функцией Лагранжа** данной системы, а величина  $S$  — **действием**.

Пусть  $q(t)$  и есть функция, для которой  $S$  имеет минимум. Тогда для любой другой функции  $q(t) + \delta q(t)$  действие будет иметь большее значение. Для удовлетворения граничным условиям ( $t = t_1$  и  $t = t_2$ ) должно выполняться:  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ .

Принцип Гамильтона можно формализовать (произведя варьирование и интегрирование по частям):

$$\delta S = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.1)$$

Оставшийся интеграл должен быть равным нулю при произвольных значениях  $\delta q$ , что возможно лишь при тождественном равенстве нулю подынтегрального выражения. Таким образом, вариационный принцип привел нас к **уравнениям Лагранжа** для системы с  $s$  степенями свободы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = \overline{1, s}).$$

Следует заметить, что функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной любой функции обобщенных координат и времени. Действительно, при вычислении действия (интегрировании лагранжиана) эта функция даст некую аддитивную постоянную, исчезающую после варьирования действия.

## Функции и уравнения Лагранжа

Для получения уравнения равновесия физических систем Лагранж предложил **метод обобщенных координат**: исходя из условий задачи выбирают систему из  $n$  независимых параметров  $q_i$  – обобщенных координат для данной задачи и, применяя формулы преобразования декартовых координат, преобразуют уравнения к обобщенным координатам. **Обобщенными силами** называют коэффициенты вида

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Запись  $\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0$  выражает **принцип виртуальных перемещений**: виртуальная работа заданных сил, приложенных к системе с идеальными связями и находящимися в равновесии, равна 0.

Дифференциальные уравнения движения системы сводятся к *обобщенному уравнению механики (принцип д'Аламбера–Лагранжа)*:  $\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i$ . Отсюда получаются **уравнения Лагранжа** (уЛ):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Если система находится в поле потенциальных сил, то  $Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$ ,  $U = U(q_i, t)$ , причем  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$ , следовательно, уЛ можно привести к виду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

$L = T - U$  – функция Лагранжа системы (лагранжиан).

## Функция Лагранжа заряженной частицы во внешнем ЭП

На заряд, движущийся во внешнем ЭМП, действует сила Лоренца  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$ . Она является обобщенно-потенциальной силой (зависит от скорости, т.е. удовлетворяет условию  $Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}$ ). В данном случае уЛ тоже справедливо:  $L = T - U(q_k, \dot{q}_k, T)$ .

Обобщенный потенциал имеет вид

$$U = \sum_{k=1}^s a_k(q_k, t) \dot{q}_k + U_0(q_k, t) = U_1 + U_0,$$

где  $U_1$  зависит от  $\dot{q}$ , а  $U_2$  – обычная потенциальная энергия.

Тогда  $L = T - (U_1 + U_0)$ ,  $T = \frac{mv^2}{2}$ ,  $U_0 = q\varphi$ ,  $U_1 = -q\vec{A}\vec{v} \Rightarrow$

$$L = \frac{mv^2}{2} - q[\varphi - \vec{A}\vec{v}]. \quad (\vec{E} = \text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \vec{B} = \text{rot } \vec{A}).$$

## Интегралы движения

При движении механической системы  $2s$  величин (обобщенных координат,  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ ), определяющих ее состояние, изменяются со временем. Однако, существуют функции этих величин, сохраняющих при движении постоянное значение, зависящее лишь от граничных условий. Эти функции называют **интегралами движения**. Число независимых интегралов движения для замкнутой системы с  $s$  степенями свободы равно  $2s - 1$ . Если из общего решения уравнения движения исключить постоянную, определяющую начальный

момент времени, получим интегралы движения:

$$q = q(t + t_0, \mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_{2s-1}); \quad \dot{q} = \dot{q}(t + t_0, \mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_{2s-1}).$$

В механике некоторые интегралы движения связаны с однородностью и изотропностью пространства и времени, причем они обладают свойствами аддитивности. Так, с *однородностью времени* связана **энергия** системы. Действительно, в силу однородности времени лагранжиан замкнутой системы от времени не зависит. Продифференцировав уЛ по времени, получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Величина в скобках (один из интегралов движения) и является энергией, а предыдущее уравнение описывает **закон сохранения энергии**.

Другой закон сохранения связан с однородностью пространства. В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не изменяются при ее параллельном переносе в пространстве. Формализуя сказанное, получим:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta r_a = \mathfrak{C} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0.$$

В силу уЛ, получим:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0; \quad \vec{p} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \text{const.}$$

Вектор  $\vec{p}$  называется **импульсом** системы, а предыдущее выражение — не что иное, как **закон сохранения импульса**. Из закона сохранения импульса,  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$  вытекает, также, что сумма сил, действующих на частицы замкнутой системы, равна нулю.

Если движение описывается обобщенными координатами,  $q_i$ , то производные лагранжиана по обобщенным скоростям,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , называют **обобщенными импульсами**, а производные по обобщенным координатам,  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  — **обобщенными силами**.

## 3 Канонические уравнения Гамильтона

### Канонические уравнения Гамильтона

**Уравнениями Гамильтона** называют дифференциальные уравнения движения замкнутой системы в канонических переменных: обобщенных координатах,  $q_i$ , и обобщенных импульсах,  $p_i$ . Для составления уравнений Гамильтона необходимо знать характеристическую функцию системы: **функцию Гамильтона**,  $H(q, p, t)$ . Тогда, если все действующие на систему силы потенциальны, получим уравнения Гамильтона:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Значение функции Гамильтона получим, исходя из первого дифференциала лагранжиана, учитывая, что  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ , а  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ :

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i,$$

что можно переписать в виде:

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала, имеет смысл энергии системы, т.е. и является функцией Гамильтона. Тогда из уравнения  $dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i$  можно получить уравнения Гамильтона.

Подставив уравнения Гамильтона в выражение для полной производной функции Гамильтона по времени, получим:  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ . В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, придем к закону сохранения энергии:  $dH/dt = 0$ .

Если лагранжиан  $L$  содержит малую добавку к функции  $L_0$ :  $L = L_0 + L'$ , то соответствующую добавку к функции Гамильтона,  $H'$ , можно найти, исходя из полных дифференциалов  $dL$  и  $dH$ :

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}, \quad \text{аналогично,} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}.$$

## Скобки Пуассона

Пусть  $f(p, q, t)$  — некоторая функция. Подставив в ее полную производную по времени выражения для  $\dot{p}_i$  и  $\dot{q}_i$  из уравнений Гамильтона, получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$$

где введено обозначение

$$\{H, f\} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right).$$

Выражение  $\{H, f\}$  называют **скобками Пуассона** для величин  $H$  и  $f$ . Аналогично можно определить скобки Пуассона для двух любых других функций.

Из определения скобок Пуассона следуют их *свойства*:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}; \quad \{\mathfrak{C}_1 f + \mathfrak{C}_2 g, h\} = \mathfrak{C}_1 \{f, h\} + \mathfrak{C}_2 \{g, h\};$$

$$\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\};$$

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}; \quad \{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}; \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}.$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \equiv 0.$$

Последнее свойство называют **тождеством Якоби**. Из тождества Якоби получим, что если  $f$  и  $g$  — два интеграла движения, то составленные из них скобки,  $\{f, g\}$ , тоже являются интегралом движения.

## Уравнение Гамильтона–Якоби

Положим в выражении (2.1)  $\delta q(t_1) = 0$ , а  $\delta q(t_2) = \delta q$ . Заменив  $\delta L / \delta \dot{q} = p$ , получим (т.к. траектории удовлетворяют уравнению Лагранжа):  $dS = \sum p_i \delta q_i$ .

Из определения действия,  $dS/dt = L$ . Расписав полную производную действия по времени, получим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H, \quad \text{либо} \quad dS = \sum_i p_i dq_i - H dt.$$

Если заменить в функции Гамильтона импульсы производными  $\delta S/\delta q$ , получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q; \frac{\partial S}{\partial q}; t) = 0,$$

которому должна удовлетворять функция  $S(q; t)$ . Это уравнение называется **уравнением Гамильтона–Якоби**. Решение уравнения для системы с  $s$  степенями свободы содержит  $s + 1$  произвольных постоянных, при этом, т.к.  $S$  входит в уравнение только через свои производные, одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом, т.е. полный интеграл Гамильтона–Якоби имеет вид

$$S = f(t; q_1, \dots, q_s; \mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_s) + \text{const}.$$

Из найденного решения уравнения Гамильтона–Якоби можно, составив  $s$  равенств  $\delta S/\delta \mathfrak{C}_i = \alpha_i$ , найти вид функций  $q_i = q_i(t, \mathfrak{C}_i, \alpha_i)$ . Из уравнений  $p_i = \delta S/\delta q_i$  найдем значения функций  $p_i$ .

Метод решения задач механики при помощи уравнения Гамильтона–Якоби имеет важную роль в оптике и квантовой механике. В частности, **уравнение эйконала**, известное в геометрической оптике, можно рассматривать как аналог уравнения Гамильтона–Якоби. Роль эйконала (поверхности движущихся волн) играют поверхности  $S(q_i) = \text{const}$ , а роль световых лучей — ортогональные к этим поверхностям траектории движения.

## 4 Законы сохранения

### Замкнутые СО

Все законы сохранения выполняются лишь для **замкнутых СО** — таких СО, которые не взаимодействуют с внешними телами. Все тела замкнутой СО взаимодействуют лишь друг с другом, и внешняя сила, приложенная к ним, равна нулю.

## Закон сохранения и изменения импульса МТ и СМТ

**Теорема об изменении импульса** получается путем преобразования 2ЗН:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Rightarrow d(m\vec{v}) = \vec{F}dt,$$

$\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс МТ.  $\vec{F}dt$  – элементарный импульс силы, отсюда: *дифференциал импульса МТ равен элементарному импульсу силы, приложенной к ней.*

Если равнодействующая всех приложенных к МТ сил равна 0, то  $\vec{p}$  остается постоянной величиной во все время движения (**Закон сохранения импульса**):  $\vec{F} = 0, \Rightarrow d\vec{p} = 0; \vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}$ .

Законы сохранения объединяют три первых интеграла движения:  $\dot{x} = C_1, \dot{y} = C_2, \dot{z} = C_3$ .

Рассмотрим теперь систему  $n$  МТ.  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ji}^{(i)}$  – сила, действующая на  $i$ -ю точку (сумма внешних и внутренних сил). Отсюда,  $d\vec{p}_i = (\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}^{(i)})dt$ ;  $d\vec{p} = \sum d\vec{p}_i = \sum (\vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{F}_{ji}^{(i)})dt = \sum \vec{F}_i^{(e)} dt$ , т.к.  $\sum \sum \vec{F}_{ji}^{(i)} = 0$ . Или:  $d\vec{p} = \vec{F}^{(e)}dt$ , где  $\vec{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}$ ,  $\Rightarrow$  если главный вектор внешних сил равен нулю, то  $\vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}$ .

## Теорема о движении центра масс

**Центр масс** – воображаемая точка с РВ  $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$ ,  $\dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$ ,  $\Rightarrow M\dot{\vec{r}}_c = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$  или  $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ ;  $d\vec{p} = \sum d\vec{p}_i = \vec{F}^{(e)}dt \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$ .

ЦМ СМТ движется как МТ, масса которой равна суммарной массе системы, а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

## Движение тел с переменной массой, уравнения Мещерского и Циолковского

В случае точки с переменной массой, на нее, кроме внешних сил, действуют еще и силы, вызванные отделением частицы массой  $\delta M$ .

Будем считать, что изменение  $d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2$ , где первое слагаемое — от действия силы при постоянной массе, а второе — за счет изменения массы в отсутствие действия силы.

$d\vec{v}_1 = \frac{1}{m}\vec{F}dt$ .  $d\vec{v}_2$  находим из ЗСИ:  $M\vec{v} = (M - \delta M)(\vec{v} + d\vec{v}_2) + \vec{u}\delta M$ , где  $\vec{u}$  — скорость частицы  $\delta M$  в неподвижной СК. Пренебрегая малыми второго порядка, получим:  $d\vec{v}_2 = -\frac{\delta M}{M}(\vec{u} - \vec{v})$ , а т.к.  $dM = -\delta M$ , то  $d\vec{v}_2 = \frac{dM}{M}(\vec{u} - \vec{v})$ .

Следовательно,  $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{M}dt + \frac{dM}{M}(\vec{u} - \vec{v})$ , получим **дифференциальное**

**уравнение Мещерского (уМ):**  $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM}{dt}(\vec{u} - \vec{v})$ .

Другое выражение уМ:  $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}_R$ , где  $\vec{\Phi}_R = \frac{dM}{dt} \cdot \vec{v}_R$  — *реактивная сила*, а  $\vec{v}_R$  — *скорость истечения газов*.

**Первая задача Циолковского:** рассмотрим ракету, движущуюся в свободном пространстве в отсутствие каких-либо внешних сил. Тогда:  $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_R$ , или, проецируя на оси:  $M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_R$ .

Будем считать, что  $v_R = \mathbf{const}$ , тогда

$$\frac{1}{v_R} \int_{v_0}^v dv = - \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \Rightarrow v = v_0 + v_R \ln \frac{M_0}{M}.$$

Пусть  $m$  — масса топлива,  $m_P$  — масса ракеты,  $z = \frac{m}{m_P}$  — *число Циолковского*.

Следовательно, после выгорания *всего* топлива:

$$\boxed{v_1 = v_0 + v_R \ln(1 + z)} \text{ — формула Циолковского.}$$

Таким образом, *скорость в конце горения топлива не зависит от закона изменения массы*.

Для нахождения *уравнения движения* необходимо учесть закон изменения массы:

$$1) \text{ линейный: } M = M_0(1 - \alpha t); x = v_0 t + \frac{v_R}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t].$$

$$2) \text{ показательный: } M = M_0 e^{-\alpha t}; x = v_0 t + \frac{\alpha v_R t^2}{2}.$$

**Вторая задача Циолковского:** рассмотрим движение ракеты в поле тяжести планеты, считая его направленность постоянной:  $g = \mathbf{const}$ ,

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} v_R, \Rightarrow v = v_0 - gt + v_R \ln \frac{M_0}{M}.$$

И уравнения движения:

$$1) x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_R}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t]$$

$$2) x = x_0 - \frac{gt^2}{2} + \frac{\alpha v_R t^2}{2}.$$

## 5 Законы изменения и сохранения механической энергии

### Работа Силы

**Работа постоянной силы**  $\vec{F}$  на прямолинейном перемещении  $\Delta\vec{r}$ , образующим с направлением силы угол  $\alpha$ , определяется формулой

$$A = F \Delta r \cos \alpha = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Криволинейный участок можно разбить на бесконечно малые элементы, которые можно рассматривать как прямолинейные. Тогда для элементарной работы получим:  $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \vec{F} d\vec{r}$ .

Т.к. работа не является в общем случае полным дифференциалом какой-либо функции координат, то используется частный дифференциал. Для нахождения работы на каком-то участке  $AB$  траектории, необходимо просуммировать элементарные работы:  $A_{12} = \int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int_{AB} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ . То есть,  $A$  – криволинейный интеграл от силы, взятый вдоль траектории движения точки.

В общем случае для нахождения работы необходимо знать уравнения движения  $\vec{r}(T)$ :  $A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt$ , где  $\Phi(t) = \vec{F} d\vec{r}$ .

## Консервативные силы

**Консервативными силами** называются силы, работа которых не зависит от траектории частицы, а зависят лишь от ее начального и конечного положений. Примером КС являются **потенциальные силы** (силы, не зависящие от скорости движения точки):  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ .

Можно подобрать скалярную функцию, удовлетворяющую условию  $\vec{F} = -\text{grad } U$  ( $U$  – **потенциальная энергия**). Иногда условие потенциальности записывают как  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .

Рассмотрим *стационарные* потенциальные силы:

$$d\vec{F} = \vec{F} d\vec{r} = -\text{grad } U d\vec{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -dU$$

или  $A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1$ . Таким образом, мы доказали, что стационарные потенциальные силы являются консервативными.

## Кинетическая и потенциальная энергии МТ и СМТ

Преобразуем основное уравнение динамики  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow [m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)] \Rightarrow$

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F} d\vec{r}.$$

Таким образом, элементарная работа силы, действующей на МТ, равна элементарному приращению величины  $\frac{1}{2}mv^2 = T$  – **кинетической энергии МТ**. Т.е.  $dT = \delta A$ , или  $A = T_2 - T_1$  – *теорема об изменении кинетической энергии*.

Почти аналогично и для потенциальной энергии:  $A = -(U_2 - U_1)$ .

Рассмотрим теперь СМТ:  $d(\frac{1}{2}m_i v_i^2) = (\vec{F}_i^{(e)} + \sum F_{ij}^{(i)}) d\vec{r} \Rightarrow dT = d(\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2) = \sum \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r} + \sum \sum \vec{F}_{ij}^{(i)} d\vec{r}$ , то есть здесь подключаются еще и внутренние силы:  $dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}$ .

Аналогично для потенциальной энергии:  $\delta A_U^{(e)} = -d \sum U_i^{(e)}(\vec{r}_i) = -dU^{(e)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ , где  $U$  – потенциальная энергия системы во внешнем силовом поле.  $\delta A_{U_i}^{(i)} = -\text{grad}_i U^{(i)} d\vec{r}_i \Rightarrow \delta A_U^{(i)} = -\sum \text{grad}_i U^{(i)} d\vec{r}_i = -dU^{(i)}$ .

Т.о.,  $\delta A_U = - (dU^{(e)} + dU^{(i)})$ .

### Закон сохранения механической энергии системы (ЗСЭ)

Для МТ  $d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F} d\vec{r} = -dU \Rightarrow d(T+U) = 0$ , или  $T+U = \text{const.} \Rightarrow E = \text{const.}$  (т.к.  $E = T + U$ ).

Для СМТ:  $d(\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2) = -dU^{(i)} - dU^{(e)} \Rightarrow d(T + U^{(i)} + U^{(e)}) = 0$ , или  $T + U^{(e)} + U^{(i)} = \text{const.}$  Отсюда,  $E = \text{const.}$ ,  $E = T + U^{(e)} + U^{(i)}$ .

Системы с сохраняющейся энергией называются **консервативными**.

### Соударение тел. Абсолютно упругий и неупругий удар

При соударении тела деформируются. При этом частично или полностью кинетическая энергия тел переходит в потенциальную. **Абсолютно неупругий удар** — при котором не возникает потенциальная энергия упругой деформации. После удара тела образуют одно целое и либо двигаются вместе, либо покоятся. **Абсолютно упругий удар** сохраняет полную механическую энергию тел, т.е. кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, затем тела возвращаются к первоначальной форме и потенциальная энергия переходит в кинетическую.

В обоих случаях выполняется ЗСИ. Ограничимся рассмотрением *центрального удара* (когда шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры).

**Абсолютно неупругий удар**

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \Rightarrow u = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

**Абсолютно упругий удар**

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), & (*) \\ m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) (\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2) (\vec{v}_2 + \vec{u}_2). \end{cases}$$

Отсюда,  $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ , умножая это выражение на  $-m_2$ , а затем на  $m_1$  и складывая с (\*), получим:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2}; \quad \vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

**Рассеяние частиц. Эффективное сечение**

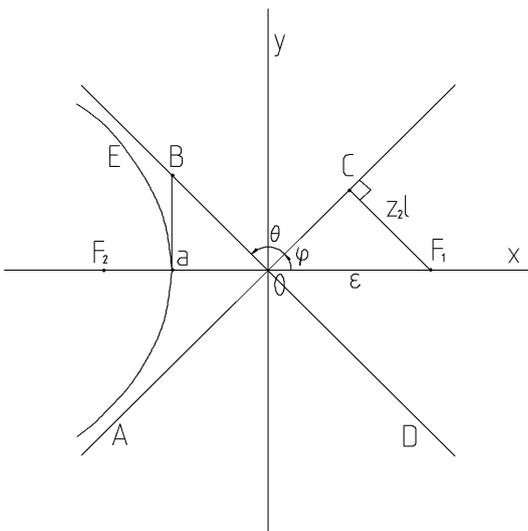
Рассмотрим рассеяние частиц с зарядом  $Z_1 e$  на силовом центре  $Z_2 e$ . Пусть  $m$  — масса частицы. Массу ядра будем считать бесконечно большой.

$U = k \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}; E_0 > 0$ . Угол рассеяния —  $\theta$ , прицельное расстояние —  $b$  (расстояние от ядра, на котором частица пролетела бы в отсутствии отталкивания).

Из ЗСЭ следует, что  $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2kZe^2}{q}$ , где  $q$  — фактическое минимальное расстояние до ядра ( $EF_1$ ). ЗСМИ:  $mvb = mv_0 q$ .

По рисунку:  $a = EO$ ;  $b = CF_1$ ;  $q = EF_1$ ;  $\theta = COB$ ;  $\varphi = F_1OC$ .

$\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$  — эксцентриситет гиперболы;  $F$  — ее фокус.



лы;  $F$  — ее фокус.

$$a = \varepsilon \cos \varphi; b = \varepsilon \sin \varphi; q = (1 + \cos \varphi)\varepsilon \Rightarrow \frac{b}{q} = \frac{v_0}{v} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}. \text{ Из ЗСЭ:}$$

$$\frac{v_0^2}{v^2} = 1 - k \frac{Z_1 Z_2 e^2}{q} \cdot \frac{2}{mv^2} = 1 - \frac{2kZ_1 Z_2 e^2}{mv^2 b} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

$$\text{Так как } \frac{v_0^2}{v^2} = \left( \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \text{ то}$$

$$\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = 1 - \frac{2kZ_1 Z_2 e^2}{mv^2 b} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi},$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{mv^2}{kZ_1 Z_2 e^2} b. \quad \varphi = 90^\circ - \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{b = \frac{kZ_1 Z_2 e^2}{mv^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.}$$

**Эффективным дифференциальным сечением** рассеяния называется отношение числа частиц, рассеянных в данный элемент телесного угла, к числу частиц, падающих на единичную площадку перпендикулярно скорости падения, в единицу времени:

$$d\sigma = \frac{dN}{J_{\text{пад.}}} = \frac{J_{\text{расс.}}}{J_{\text{пад.}}} dS = \frac{J_{\text{расс.}}}{J_{\text{пад.}}} r^2 d\Omega.$$

Пусть  $j$  — плотность потока падающих частиц. Чтобы угол рассеяния лежал в диапазоне  $(\theta, \theta + d\theta)$ , прицельное расстояние должно изменяться от  $b$  до  $b + db$ . Число частиц  $dN = -j ds = 2\pi j b db$ . Тогда  $d\sigma = -2\pi b db = -2\pi b \frac{db}{d\theta} d\theta$ .  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \Rightarrow d\sigma = -\frac{1}{\sin \theta} b \frac{db}{d\theta} d\Omega$ .  $\frac{db}{d\theta} = -\frac{kZ_1 Z_2 e^2}{mv^2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow$

получим **формулу Резерфорда**:

$$\boxed{d\sigma = \left( \frac{kZ_1 Z_2 e^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta / 2}.}$$

## 6 Законы изменения и сохранения момента импульса (ЗСМИ)

### Момент импульса и силы. Уравнение моментов

Возьмем какую-либо точку, относительно которой будем рассматривать моменты силы (импульса). Ее называют **началом** (полюсом). Пусть  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки приложения силы  $\vec{F}$ . **Моментом силы  $\vec{F}$**  относительно точки  $O$  называется векторное произведение  $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ .  $\Rightarrow$  при перенесении точки приложения силы в любую другую точку, лежащую на линии действия силы, момент не изменится.

Если сил несколько, то  $\vec{M} = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i$  (аддитивность моментов силы). Если есть две равные антипараллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , получим так называемую **пару сил**:  $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2$ .

Т.е. *момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.*

**Моментом импульса** называют векторное произведение  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Для СМТ  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ .

$\vec{L}$  и  $\vec{M}$  связаны *уравнением моментов*:  $\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$ . Если  $O$  неподвижно, то  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ , т.е.  $\dot{\vec{r}} \parallel \vec{p}$ .  $\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \Rightarrow$  получили **уравнение моментов**:

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}}$$

Для СМТ  $\vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ij}^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}$ ;  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum \sum \vec{F}_{ij}^{(i)} + \sum \vec{F}_i^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)}$ .  $\Rightarrow$   
 $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(e)}}$ .

### Закон изменения и сохранения момента импульса

Уравнение моментов есть закон изменения момента импульса:  $\dot{\vec{L}} = \vec{M} \Rightarrow$  если  $\vec{M} = 0$ , то  $\dot{\vec{L}} = 0$  и, следовательно,  $\vec{L} = \text{const}$ .

**Закон сохранения момента импульса:** если момент сил, действующих на МТ, равен 0, то вектор момента импульса остается постоянным на протяжении всего движения.

ЗСМИ объединяет три *первых интеграла движения* (интегралы площадей):

$$\mathfrak{C}_4 = y\dot{z} - z\dot{y}; \quad \mathfrak{C}_5 = z\dot{x} - x\dot{z}; \quad \mathfrak{C}_6 = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Иначе говоря, это **закон постоянства секторной скорости**:  $\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$ . Из постоянства секторной скорости вытекает второй закон Кеплера.

## Движение в поле центральных сил. Основные законы движения планет

Рассмотрим движение изображающей точки с приведенной массой  $m'$  в центрально-симметричном поле (эта масса совпадает с массой тела  $m$ , если  $m \ll M$ ). В данном случае  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ , т.к.  $\vec{F} \parallel \vec{r}$ ,  $\Rightarrow$

$$\vec{L} = m'\vec{r} \times \vec{v}; \quad L = m'r^2\dot{\varphi} \quad (v_{\perp} = r\dot{\varphi}); \quad E = T + U;$$

$$T = \frac{m}{2}(v_{\perp}^2 + v_r^2) = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) \quad \Rightarrow \quad E = U(r) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Эффективный потенциал,  $U_e = U + \frac{L^2}{2m'r^2}$ ,  $\Rightarrow \dot{r}^2 = 2\frac{E - U_e}{m'}$ ,  $\dot{r} = \sqrt{\frac{r}{m'}(E - U_e)}$ ,

$$t = t_0 + \int \frac{dr}{\sqrt{r/m'(E - U_e)}}.$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{L}{m'} \int \frac{dt}{r^2} = \varphi_0 + \int \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{r/m'(E - U_e)}}.$$

Последнее является уравнением траектории тела.

Рассмотрим центральное поле тяжести:  $\vec{F} = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$ ,  $\gamma = GM$  — **постоянная Гаусса**. В таком поле справедливы **законы Кеплера**:

1. Каждая из планет движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Если учесть массу Солнца  $M_{\odot}$ , следует сделать поправку: фокус совпадает с центром масс системы.
2. За равные промежутки времени  $PB$  планеты заметает равные площади траектории (постоянство секторной скорости планет).
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:  $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$ . Этот закон является верным лишь в случае, когда  $m' \ll M$  (т.е. для планет), иначе:

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

## Финитное и инфинитное движение под действием сил притяжения

Составим лагранжиан

$$\Lambda = T - U = \frac{1}{2}m'(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \gamma\frac{m}{r},$$

где  $m' = \frac{mM}{m+M}$  — приведенная масса точки, изображающей систему,

$r^2\dot{\varphi} = c$  — удвоенная секторная скорость (**const**)  $\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$ .

$$\text{УЛ: } \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = 0, \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{m'} \frac{\gamma}{r^2} = 0.$$

Пусть  $k = \frac{m}{m'} = \frac{m(m+M)}{mM} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \approx 1$ , т.к. обычно  $m \ll M$ . Далее, т.к.  $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$ , то

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{k\gamma}{r^2} = 0.$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \text{ отсюда } \ddot{r} = \frac{c}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) \text{ и}$$

$$\frac{c^2}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{k\gamma}{r^2}.$$

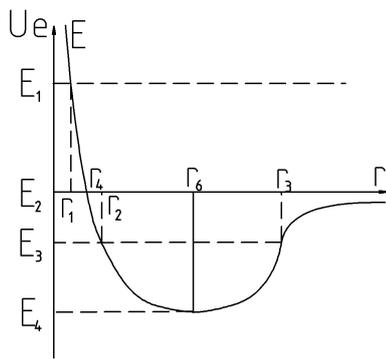
Пусть  $x = 1/r$ , тогда получим:  $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\varphi}$ ;  $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{dx}{d\varphi}$ ;  $\Rightarrow \frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \frac{k\gamma}{c^2}$ . Его решение:  $x = x_1 + x_2 = \frac{k\gamma}{c^2} + A \cos(\varphi + \alpha)$ .

$$r = \left[ \frac{k\gamma}{c^2} + A \cos(\varphi + \alpha) \right]^{-1} = \frac{c^2/k\gamma}{1 + \frac{Ac^2}{k\gamma} \cos(\varphi + \alpha)}.$$

Получили **уравнение движения**  $r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)}$ , где  $p = \frac{c^2}{k\gamma}$  и

$e = \frac{Ac^2}{k\gamma}$  — параметр и эксцентриситет орбиты соответственно. Тогда, если  $e < 1$  орбита тела будет эллиптической,  $e = 1$  — параболической,  $e > 1$  — гиперболической.

Рассмотрим гравитационный потенциал и виды движения при разных энергиях тела  $E = T + U_e$ , где  $U_e = -\frac{\gamma m'}{r} + \frac{1}{2} \frac{mc^2}{r^2}$ .



1.  $E_1 > 0$ :  $r_1 \leq r \leq \infty$  — бесконечное гиперболическое движение;
2.  $E_2 = 0$ :  $r_4 \leq r \leq \infty$  — бесконечное параболическое движение;
3.  $E_3 < 0$ ,  $T \neq 0$ :  $r_2 \leq r \leq r_3$  — конечное эллиптическое движение;
4.  $E_4 < 0$ ,  $T = 0$ :  $r = r_5 = \mathbf{const}$  — конечное движение по окружности.

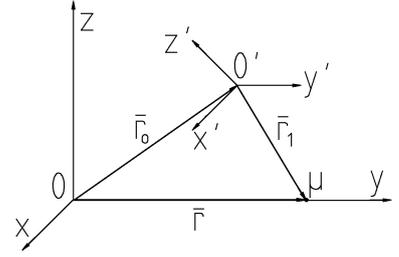
## 7 Неинерциальные системы отсчета (НИСО)

### Движение МТ в НИСО. Силы инерции

В некоторых случаях оказывается более удобным пользоваться НИСО. В общем случае СО может быть связана с телом, произвольно движущимся в некоторой ИСО.

Для преобразования координат, скоростей и ускорений, необходимо пользоваться формулами для сложного движения точки.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \sum_{\alpha=x,y,z} x'_\alpha \frac{d\vec{i}'_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{dx'_\alpha}{dt} \vec{i}'_\alpha.$$



Обозначим второе слагаемое  $\vec{v}_n$  — переносная скорость,  $\vec{v}_{от}$  — относительная скорость.

$$\text{Т.к. } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{i}}'_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{i}'_\alpha} \quad (*).$$

$$\text{Тогда } \vec{v}_n = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

$$\vec{a} = \left( \ddot{\vec{r}}_0 + \sum x'_\alpha \frac{d^2 \vec{i}'_\alpha}{dt^2} \right) + 2 \sum \frac{dx'_\alpha}{dt} \frac{d\vec{i}'_\alpha}{dt} + \sum \frac{d^2 x'_\alpha}{dt^2} \vec{i}'_\alpha.$$

Здесь первое слагаемое в скобках — переносное ускорение  $\vec{a}_n$ , второе — кориолисово ускорение  $\vec{a}_k$ , третье — относительное ускорение  $\vec{a}_{от}$ . Из (\*) получаем:

$$\vec{a}_n = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'], \quad \vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}.$$

Формула сложения ускорений:  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$ . Где  $\vec{a}$  — ускорение МТ в неподвижной системе,  $\vec{a}'$  — ускорение в движущейся системе,  $\vec{a}_n$  — переносное ускорение,  $\vec{a}_k$  — кориолисово ускорение.

$$\vec{a}_n = \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']; \quad \vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}.$$

$$\text{Т.к. } \vec{F} = m\vec{a}, \text{ то } \vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_n + m\vec{a}_k.$$

В подвижной НИСО это уравнение имеет подобие 23Н:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + (-m\vec{a}_n) + (-m\vec{a}_k).$$

Второе и третье слагаемые удобно рассматривать как особые силы — **силы инерции**:  $\vec{i}_k = -m\vec{a}_k$  — кориолисова сила и  $\vec{i}_n = -m\vec{a}_n$  — переносная сила, кроме того, для несвободной МТ добавится сила реакции  $\vec{R} \Rightarrow$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} + \vec{i}_n + \vec{i}_k.$$

Если МТ покоится в ИСО, то  $v_{от} = 0$ ,  $a' = 0$ ,  $a_k = 0 \Rightarrow$

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{i}_n = 0.$$

## Принцип д'Аламбера (ПдА)

ПдА для свободной МТ эквивалентен основному закону динамики, а для несвободной — основному закону вместе с аксиомой связи.

*При движении МТ активные силы и реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил:*

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{i} = 0, \quad \text{или} \quad \{\vec{F}, \vec{R}, \vec{i}\} \sim 0.$$

Т.о., ПдА есть условие относительного равновесия для сил в собственной СО.

Для СМТ ПдА формулируется так: *при движении механической системы сила и реакция связей вместе с силой инерции составляют равновесную для каждой точки систему:*

$$\{\vec{F}_k, \vec{R}_k, \vec{i}_k\} \sim 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

## Лагранжиан частиц в НИСО

Рассмотрим МТ  $m$ , находящуюся в потенциальном поле. Тогда в неподвижной ИСО:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}),$$

в движущейся НИСО:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'; \quad U(\vec{r}) = U(\vec{r}') \Rightarrow$$

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega} \times \vec{r}']^2 + m\vec{v}' \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}'] + \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + m\vec{v}_0(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') - U(\vec{r}').$$

$$m\vec{v}_0(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \frac{d}{dt}(m\vec{r}'\vec{v}_0) - m\vec{r}'\vec{a}_0, \quad \text{т.к.} \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Отбросив слагаемые, не зависящие от  $r'$  и  $v'$ , а также полную производную по времени (она не влияет на уЛ), получим:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega} \times \vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{a}_0 - U(\vec{r}') + m\vec{v}'[\vec{\omega} \times \vec{r}'].$$

Запишем уЛ:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} = 0$ . Отсюда

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Таким образом, уЛ инвариантны по отношению к переходам между НИ-СО и силы инерции принадлежат к *обобщенно-потенциальным силам*.

## Маятник Фуко

**Маятник Фуко** — маятник большой длины со сферическим подвесом. Рассмотрим уравнение его движения:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}},$$

где  $\vec{G}$  — сумма силы тяжести и центробежной силы инерции. Обозначим  $\varphi$  — широта места,  $\theta$  — угол, характеризующий плоскость вращения. Расположим начало отсчета в центре неподвижно висящего подвеса.

Сила тяжести  $\vec{G} = -mg\vec{k}$ , сила реакции  $\vec{R} = -N \left( \frac{x}{l}\vec{i} + \frac{y}{l}\vec{j} + \frac{z-l}{l}\vec{k} \right)$ , угловая скорость  $\vec{\omega} = -\omega \cos \varphi \vec{i} + \omega \sin \varphi \vec{k}$ , кориолисова сила

$$\vec{I}_k = 2m\omega \left[ y \sin \varphi \vec{i} - (\dot{z} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi) \vec{j} + y \cos \varphi \vec{k} \right].$$

Тогда, применяя принцип д'Аламбера, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\dot{y} \sin \varphi, \\ m\ddot{y} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega(\dot{z} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi), \\ m\ddot{z} = -mg + N\frac{l-z}{l} + 2m\omega\dot{y} \cos \varphi. \end{cases}$$

Рассмотрим малые колебания маятника. Вычисления будем проводить с точностью до  $x/l$ ,  $y/l$ . Т.к.  $z = l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l(1 - \sqrt{1 - (x/l)^2 - (y/l)^2}) \approx 0$ , то  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ , следовательно, получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\dot{y} \sin \varphi, \\ m\ddot{y} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\dot{x} \sin \varphi, \\ 0 = -mg + N + 2m\omega\dot{y} \cos \varphi. \end{cases}$$

Из-за малости  $\omega$  и  $\dot{y}$ , получим из третьего уравнения:  $N = mg \Rightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ \ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega\dot{x}\sin\varphi. \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = -2\omega\sin\varphi(x\dot{x} + y\dot{y}), \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = -2\omega\sin\varphi \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Преобразуем:  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -2\omega\sin\varphi \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)$ . Тогда получим уравнение движения маятника:

$$r^2\dot{\theta} = -\omega\sin\varphi r^2 + \mathfrak{C}.$$

При НУ  $r|_{t=0} = 0$  получим наиболее простой характер движения:

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\varphi.$$

## Теорема Лармора

Пусть  $\alpha$  — угол между осью гироскопа и отвесной линией. Момент силы  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ , а т.к.  $\vec{M} = m\vec{g} \times \vec{r}$ , получим, что  $\dot{\vec{L}} \perp \vec{L}$ . Т.о., приложенный момент силы не изменяет круговую частоту  $\omega$ , а лишь придает системе прецессию с частотой  $\Omega$ .

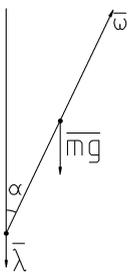
По аналогии с  $\dot{r} = \omega r$  получим:  $\dot{L} = \Omega L \Rightarrow \Omega L = M = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$ ,

а т.к.  $L = J\omega$ , получим выражение для **Ларморовой частоты**:

$$\Omega = \frac{mgl\sin\alpha}{2J\omega}.$$

В случае, когда гироскоп — цилиндр, насаженный на бесконечно тонкую ось, имеем:  $J = \frac{1}{2}mR^2$ ,  $\Rightarrow$

$$\Omega = \frac{gl\sin\alpha}{R^2\omega}.$$



## 8 Основы Специальной Теории Относительности (СТО)

### Принцип относительности и постулат постоянства скорости света

Принцип относительности Галилея испытал многократные проверки, показывающие, что он применим не во всех случаях.

**Опыт Майкельсона** (проверка существования эфира). Плечо  $AC$  интерферометра совпадает с направлением вектора скорости Земли. В результате интерференционная картина сдвигается. Если же повернуть интерферометр на  $90^\circ$ , полосы сдвигаются в другую сторону. Это имело бы место, если бы вращение Земли влияло бы на скорость света. В действительности же смещение не было обнаружено. Таким образом, этот опыт доказал отсутствие привилегированной СС.



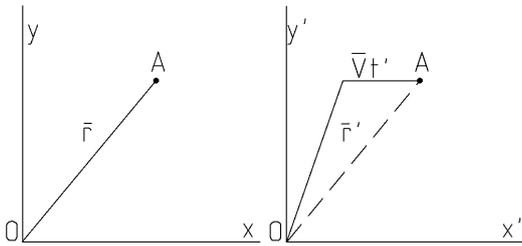
**Принцип относительности:** *любое физическое явление протекает одинаково во всех ИСО.* Т.о., законы физики инвариантны по отношению к переходам между ИСО.

**Принцип постоянства скорости света:** *во всех ИСО по всем возможным направлениям скорость распространения света в пустоте имеет одно и то же значение, равное  $c$ .* Или же: существует предельная скорость распространения взаимодействий, равная  $c$ .

### Преобразования Лоренца и их инварианты

Согласно модели СТО, геометрическое пространство трехмерно и евклидово, непрерывно, однородно и изотропно. Время одномерно, непрерывно, однородно и однонаправленно.

Рассмотрим две СК  $K$  и  $K'$ , причем  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $V = v_x$  ( $v_y = v_z = 0$ ). Совместим часы СК в некоторый момент времени  $t = t' = 0$ . Нештрихованная система движется в  $K'$  со скоростью  $v'_x = -V$  ( $v'_y = v'_z = 0$ ). Часы в системах синхронизируем по импульсу, распространяющемуся со скоростью света  $c$ . По сигналу, испущенному в  $K$  при  $t = 0$ , часы, расположенные на расстоянии  $r$  от начала координат, будут выставлены на время  $t = r/c$ , а в  $K'$  — на время  $t' = r'/c$ .



Пусть в момент  $t = t' = 0$  центры систем ( $O$  и  $O'$ ) совпадают. Искомые преобразования должны быть линейными, т.к. пространство и время однородны,  $\Rightarrow y' = \varepsilon y$ ,  $z' = \varepsilon z$  (один и тот же коэффициент взят в силу изотропности пространства).

Т.к. обе системы равноправны, то  $y = \varepsilon y'$ ,  $z = \varepsilon z'$ .  $\Rightarrow \varepsilon = \pm 1$ . Направления осей СК совпадают,  $\Rightarrow \varepsilon = 1$ . Т.е.  $y' = y$ ,  $z' = z$

Граничные условия для  $x$ :  $\begin{cases} x' = 0, \\ x = vt; \end{cases}$  (координаты  $K$ )  $\begin{cases} x' = -vt', \\ x = 0; \end{cases}$  (координаты  $K'$ ).  $\Rightarrow$

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad x = \gamma(x' + Vt').$$

Пусть теперь в момент  $t = t' = 0$  из начала координат посылается световой сигнал, который фиксируется в обеих системах. Этому событию соответствуют координаты  $x = ct$  и  $x' = ct'$ .  $\Rightarrow ct' = \gamma(c - V)t$ ,  $ct = \gamma(c + V)t'$ .  $\Rightarrow$

$$\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Т.к. обе системы правовинтовые, выбираем  $+1$ .  $\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$\Delta t' \equiv \Delta \tau$  называется **собственным временем**,  $\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .

Если положить  $c = \infty$ , эти формулы переходят в Галилеевы:

$$t' = t, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

В классической механике  $V/c \ll 1$ , так что выполняются преобразования Галилея. **Принцип соответствия:** более общие теории содержат менее общие в качестве предельных случаев.

## Неевклидова метрика пространства-времени. Следствия преобразований Лоренца. Сложение скоростей

Из формул преобразований Лоренца получим:

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'.$$

Т.к.  $v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$ , получим:

$$v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + \frac{v_{x'} V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{x'} V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v_{z'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{x'} V}{c^2}}.$$

Преобразования скорости переходят в классический вид  $v_x = v_{x'} + V$ ,  $v_y = v_{y'}$ ,  $v_z = v_{z'}$  при  $c = \infty$ .

Помимо  $c$  существует еще один инвариант. Пусть при  $t = t' = 0$  в начале координат систем произошла вспышка света. В обеих СК будет распространяться сферическая волна с уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$  (в системе

$K$ ) и  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$  (в системе  $K'$ ). Следовательно, для всех ИСО существует единый **интервал**:

$$(\Delta S)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Трехмерное пространство оказывается в тесной связи с временем, образуя единое четырехмерное пространство.

Если  $(\Delta S)^2 > 0$ , интервал называют **пространственноподобным**, при  $(\Delta S)^2 < 0$  — **времениподобным**.

Интервал можно интерпретировать как расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве с координатами  $x_0 = ict$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Т.о., любую точку можно определить 4-вектором  $\hat{x} = (ict, x, y, z)$ . Причем длина этого вектора не изменяется при переходе между ИСО. От евклидова такое пространство отличается комплексностью первой координаты. Такое пространство называется **вещественным псевдоевклидовым пространством индекса 1**. Также его называют **пространством Минковского**.

Переход от одной ИСО к другой сводится, т.о., к повороту осей прямоугольной 4-мерной системы координат.

## **Относительность одновременности. Причинность. Сокращение длин движущихся отрезков и замедление темпа времени**

События, разделенные пространственноподобным интервалом, отстоят друг от друга на таком расстоянии или (и) следуют друг за другом так быстро, что свет не успевает дойти от 1-го до 2-го. Т.о., можно найти такую третью ИСО, в которой оба события наступят одновременно:  $t'_2 = t'_1$  (или  $\Delta S = \Delta l$ ).

Причинно связанные события не могут быть разделены пространственноподобным интервалом, т.е. связаны времениподобным интервалом (иначе бы скорость света должна была быть бесконечной). В этом случае можно найти такую ИСО, в которой оба события произойдут в одной точке, т.е. в

этом случае интервал играет роль времени, протекающего между событиями в собственной СК.

Из формул  $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$  и  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$  следует, что в движущейся СК сокращаются длины отрезков и замедляется темп времени (**парадокс близнецов**). Человек, движущийся в ракете с довольно большой скоростью, медленнее стареет.

### Релятивистское уравнение движения. Соотношения $m-E$

Рассмотрим абсолютно неупругое центральное соударение двух частиц  $m_1 = m_2 = m$ .  $K'$  свяжем с центром масс системы,  $K$  — с одной из частиц. В системе  $K'$  суммарный импульс до и после соударения равен нулю. В системе  $K$ :

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x'} + V}{1 + \frac{Vv'_{1x'}}{c^2}} = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}; \quad v_{2x} = \frac{-V + V}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 0.$$

Т.о., до соударения в  $K$  суммарный импульс равен  $\frac{2mV}{1 + \frac{V^2}{c^2}}$ . После соударения он равен  $2mV$ . Перейдем к собственному времени:  $p = m \frac{dr}{d\tau}$ .  $\Rightarrow$  получим **релятивистское выражение для импульса**:

$$p = m \frac{dr}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, нельзя считать массу образовавшейся частицы равной  $M = 2m$ . Для массы также необходимо использовать релятивистское выражение:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Получим теперь 2 закон Ньютона для СТО:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Найдем кинетическую энергию тела.  $dA = dT \Rightarrow$  т.к.  $dA = F ds$ , а  $ds = v dt$ , получим:

$$\vec{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} d\vec{s}, \quad \Rightarrow \quad dT = v d \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad \Rightarrow \quad dT = d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

$$T = \int_0^v dT = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Т.о., ЗСЭ оказывается инвариантным, лишь если свободной частице помимо кинетической энергии приписать дополнительную энергию  $E_0 = mc^2$  (**энергия покоя**). В общем случае

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Сравнивая выражения для энергии и импульса, получим, что  $\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$ , отсюда получим еще один инвариант СТО:

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2 c^2 = \text{inv.}$$

Т.е. существует еще и четырехвектор энергии-импульса  $\hat{p} = \left( -i \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$ , также являющийся инвариантом.

## 9 Динамика абсолютно твердого тела (АТТ)

**Момент силы. Момент импульса тела.**

**Момент силы**  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  (относительно точки).

Момент силы относительно оси есть проекция на эту ось момента силы, взятого относительно какой-либо точки на этой оси:  $M = rF \sin \varphi$ , где  $r \sin \varphi$  — **плечо силы**.

**Момент импульса точки**  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ .

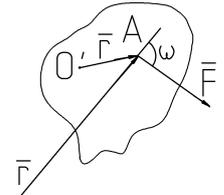
Для тела:  $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} dm$ ,  $\Rightarrow \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$ . Т.к.  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , где  $\vec{v}_0$  – скорость полюса,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость тела, получим:

$$\vec{L} = \int_V \vec{r}' \times \vec{v}_0 dm + \int_V \vec{r}' \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] dm = m\vec{r}'_c \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \int_V r'^2 dm - \int_V \vec{r}' (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') dm,$$

где  $r_c$  – РВ ЦМ в собственной СК.

Совместим полюс с ЦМ ( $\vec{r}'_c = 0$ ), выражение для  $L$  упростится:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \int_V r'^2 dm - \int_V \vec{r}' (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') dm.$$



## Момент инерции

Раскроем скобки в последнем выражении для  $L$ :

$$\vec{L} = (\omega_{x'}\vec{i} + \omega_{y'}\vec{j} + \omega_{z'}\vec{k}) \int_V (x'^2 + y'^2 + z'^2) dm - \int_V (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) (\omega_{x'}x' + \omega_{y'}y' + \omega_{z'}z') dm.$$

Тогда, например, проекция момента импульса на ось  $X'$ :

$$L_{x'} = \omega_{x'} \int_V (y'^2 + z'^2) dm - \omega_{y'} \int_V x'y' dm - \omega_{z'} \int_V x'z' dm.$$

Обозначим  $\mathfrak{I}_{\aleph\beth} = \int_V [(x'^2 + y'^2 + z'^2)\delta_{\aleph\beth} - \aleph\beth] dm$  – **тензор момента инерции**, где  $\aleph, \beth = \overline{x', y', z'}$ :  $\vec{L} = \mathfrak{I} \cdot \vec{\omega}$ .

Величину  $H = \int_V (x'^2 + y'^2 + z'^2) dm = \mathbf{const}$  называют **полярным моментом инерции**.

**Теорема Штейнера:**  $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_c + md^2$ , где  $\mathfrak{I}_s$  – момент инерции относительно оси, проходящей через ЦМ,  $\mathfrak{I}_c$  – относительно другой параллельной оси,  $d$  – расстояние между этими осями.

Диагональные элементы тензора  $\mathfrak{I}$  являются моментами инерции относительно осей  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ . Остальные компоненты называются **центробежными моментами инерции**.

Момент инерции относительно любой оси  $S$  есть:

$$\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_{11}\alpha^2 + \mathfrak{I}_{22}\beta^2 + \mathfrak{I}_{33}\gamma^2 + 2(\mathfrak{I}_{12}\alpha\beta + \mathfrak{I}_{13}\alpha\gamma + \mathfrak{I}_{23}\beta\gamma),$$

где  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  – направляющие косинусы оси  $S$ .

Как и любой другой, тензор  $\mathfrak{I}$  можно привести к собственной СК, где он примет диагональный вид:

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

компоненты  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  называются **главными центральными моментами инерции**.  
Т.к.  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , то  $\mathfrak{I}$  является симметричным тензором и имеет всего 6 различных компонент.

Если у тела  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , его называют **асимметричным волчком**, если  $I_1 = I_2 \neq I_3$  – **симметричным волчком**, если же  $I_1 = I_2 = I_3$  – шаровым.

Найдем геометрическое место отрезков длиной  $r = (I_s)^{-1/2}$ :

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1,$$

получили уравнение эллипсоида. В собственной СК оно примет вид:

$$I_1x_0^2 + I_2y_0^2 + I_3z_0^2 = 1.$$

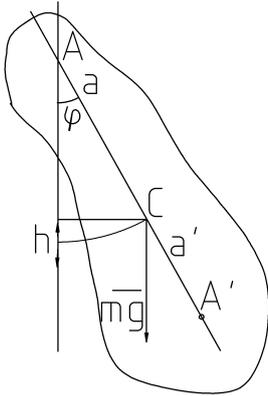
Оси  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$  называют **главными осями инерции**. Итак, главные оси инерции – три взаимно перпендикулярных направления, проходящих через данную точку, относительно которых моменты инерции тела имеют экстремальные значения (минимум для большой оси, максимум для малой и минимакс для средней).

## Момент инерции относительно оси

В общем случае,  $L_s = \mathfrak{I}_c\omega_c$  ( $\omega_c = \omega_{x'}^2\alpha^2 + \omega_{y'}^2\beta^2 + \omega_{z'}^2\gamma^2$ ). Если оси координат совместить с главными осями инерции тела, получим:  $L_{x'} = I_1\omega_{x'}$ ,  $L_{y'} = I_2\omega_{y'}$ ,  $L_{z'} = I_3\omega_{z'}$ . Т.е. в общем случае  $\vec{L}$  не совпадает по направлению  $\vec{\omega}$ . Совпадение наблюдается лишь в случае, когда осью вращения служит одна из осей инерции:  $\omega_{x'} = \omega$ ,  $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$ . Тогда  $L_{x'} = I_1\omega$ ,  $L_{y'} = L_{z'} = 0$ . Для этого случая справедливо векторное равенство:  $\vec{L} = I_1\vec{\omega}$ .

## Физический маятник. Теорема Гюйгенса

**Теорема Гюйгенса** (частный случай теоремы Штейнера): *если маятник подвесить за центр качания  $A'$ , то его период не изменится; прежняя точка подвеса  $A$  сделается новым центром качания.* Эта теорема справедлива для любого физического маятника.



**Физический маятник** — ТТ, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. **Точка подвеса** — точка пересечения горизонтальной оси вращения и прямой, проходящей через ЦМ тела.

Уравнение движения:  $\mathcal{I}\dot{\omega} = -mga \sin \varphi$ . При малых углах  $\varphi$ :  $\mathcal{I}\dot{\omega} = -mga\varphi$  или  $\mathcal{I}\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \Phi \sin(t\sqrt{mga/I} + \varphi_0)$ . Т.о., малые колебания физического маятника происходят по гармоническому закону с периодом

$$T_{\text{Физич.М.}} = 2\pi\sqrt{I/mga}, \quad T_{\text{Матем.М.}} = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

**Приведенной длиной** физического маятника называется величина  $l = \frac{I}{ma} = AA'$ . Эта величина является длиной подвеса математического маятника с таким же периодом колебаний. Точка  $A'$  называется **центром качания** (математическая точка, в которой надо сосредоточить всю массу маятника, чтобы период его колебаний остался без изменения).

По теореме Штейнера  $I = I_c + ma^2 \Rightarrow l = \frac{I_c}{ma} + a$ . Следовательно,  $l > a$  и периоды колебаний относительно любой точки подвеса, удаленной от центра на расстояние  $a$ , одинаковы.

*Доказательство теоремы Гюйгенса.* Пусть теперь  $A'$  — центр качания. Тогда  $l' = a' + \frac{I_c}{ma'} = l - a + \frac{I_c}{ma'}$ ;  $a' = l - a = \frac{I_c}{ma} \Rightarrow \frac{I_c}{ma'} = a \Rightarrow l = l'$ , что и требовалось доказать.

## Уравнение движения и уравнение моментов. Плоское движение

Для ТТ справедлива теорема о движении ЦМ системы:  $m\vec{a} = \vec{F}$ , т.е. ЦМ системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса тела, а к ней приложен главный вектор сил, действующих на тело. Координаты центра масс:

$$\aleph_c = \frac{1}{m} \int_V \rho \aleph dV, \quad \aleph = \overline{x, y, z}.$$

В проекциях имеем:  $m\ddot{\aleph}_c = F_{\aleph}$ . В случае плоского движения тела  $\omega = 0$  и все тело можно рассматривать как материальную точку (ЦМ). В данном случае  $M = 0$ .

Найдем теперь уравнения движения в случае сложного движения ТТ. В общем случае,  $(\vec{L})_{\aleph'} \neq \dot{L}_{\aleph}$ . Вид теоремы об изменении  $L$  совпадает с теоремой для МТ:  $\vec{L} = \vec{M}$ .

Пусть  $\vec{V}$  — скорость движения конца вектора  $\vec{L}$ , тогда получим:  $\vec{V} = \vec{L}$ . **Теорема Резаля:** *скорость движения конца вектора момента импульса ТТ по величине и направлению совпадает с вектором главного момента сил, приложенных к телу.*

По теореме о сложении скоростей:  $\vec{V} = \vec{V}_{\text{Отн}} + \vec{V}_{\text{Пер}}$ . Пусть  $\vec{V}_{\text{Отн}} = \vec{L}^*$ . Переносную скорость получим, считая  $\vec{L}$  неподвижным относительно тела. Тогда скорость конца вектора совпадет со скоростью точки с РВ  $\vec{r} = \vec{L}$ :  $\vec{V}_{\text{Пер}} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ . Т.о., для производной  $\vec{L}$  имеем общую формулу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}, \quad ((\vec{L}^*)_{x,y,z} = \dot{L}_{x,y,z}) \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Проецируя последнее уравнение на оси СК, совпадающей с положением главных осей инерции, получим:

$$M_{x'} = \frac{d\vec{L}_{x'}}{dt} + \omega_{y'} L_{z'} - \omega_{z'} L_{y'}, \quad \dots$$

Так как  $L_N = I_{NN}\omega_N$ , получим систему **динамических уравнений Эйлера**:

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_{y'}\omega_{z'} = M_{x'}, \\ I_2 \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_{z'}\omega_{x'} = M_{y'}, \\ I_3 \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_{x'}\omega_{y'} = M_{z'}. \end{cases}$$

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси,  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}^*$ ,  $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \vec{M} = \mathfrak{J}\dot{\vec{\omega}} = \mathfrak{J}\ddot{\vec{\varphi}}$ .

## Закон сохранения момента импульса

Если  $\vec{M} = 0$ , то, естественно,  $\dot{\vec{L}} = 0$ , следовательно,  $\vec{L} = \text{const}$ . Т.о., в отсутствии внешних моментов МИ остается постоянной величиной.

## Кинетическая энергия ТТ

Будем исходить из **теоремы Кёнига**:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i(v'_i)^2.$$

Движение элементов ТТ относительно системы, движущейся поступательно вместе с ЦМ, имеет место только вследствие вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через ЦМ:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Следовательно, кинетическая энергия вращательного движения

$$T_{\text{Вращ}} = \frac{1}{2}\int_V [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V R^2 dm = \frac{1}{2}\mathfrak{J}_s\omega^2,$$

т.к.  $r \sin(\vec{\omega} \times \vec{r}) = R \Rightarrow$  полная кинетическая энергия ТТ:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_s\omega^2.$$

Эта формула имеет место лишь в случае, когда  $\vec{\omega} = \text{const}$ , иначе  $\omega_{x'} = \omega\alpha$ ,  $\omega_{y'} = \omega\beta$ ,  $\omega_{z'} = \omega\gamma$ ;

$$T_B = \frac{1}{2} (I_1\omega_{x'}^2 + I_2\omega_{y'}^2 + I_3\omega_{z'}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{L_x^2}{I_1} + \frac{L_y^2}{I_2} + \frac{L_z^2}{I_3} \right).$$

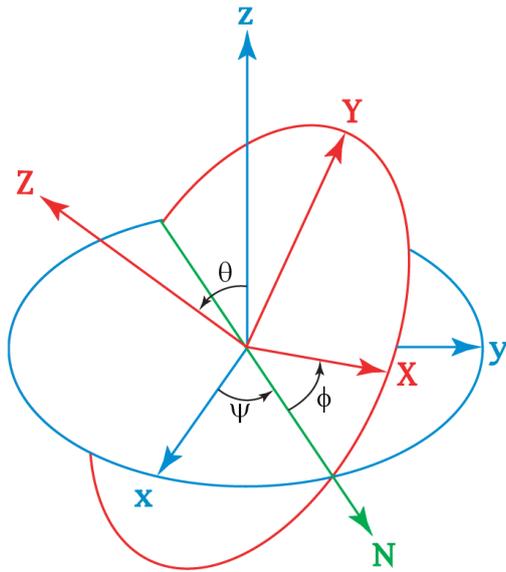
Если ось вращения неподвижна, то  $T_B = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$ .

## Движение тела с закрепленной точкой. Уравнения Эйлера

Т.к.  $\vec{L} = \mathfrak{I}\vec{\omega}$ , то в главных осях

$$T = \frac{1}{2} (I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2), \quad \text{т.к. } T_c = 0$$

Кинематические уравнения Эйлера:



$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Здесь  $\psi$  — угол прецессии,  $\theta$  — угол нутации,  $\varphi$  — угол собственного вращения.

ния.

**Теорема Эйлера:** любое движение ТТ, имеющего одну неподвижную точку, можно рассмотреть как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту неподвижную точку.

## Гироскопы. Прецессия и нутация

**Гироскоп** — симметричное ТТ, совершающее движение вокруг неподвижной точки  $O$ , расположенной на оси симметрии  $OZ$ . Эллипсоид инерции гироскопа является эллипсоидом вращения с главной осью вдоль оси вращения.

**Астатический гироскоп** — гироскоп с неподвижной точкой в ЦМ, если на него действуют только силы тяжести и реакции неподвижной точки.

Ось гироскопа  $AA'$ . Пусть  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}$ , где  $\omega_{\parallel}$  параллелен оси  $AA'$ , а  $\omega_{\perp}$  перпендикулярен ей. Тогда  $\vec{L} = \vec{L}(\vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}) = I_{\parallel}\omega_{\parallel} + I_{\perp}\omega_{\perp}$ ,  $\Rightarrow T = \frac{1}{2} (I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2)$ .

Согласно уравнению моментов,  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ . Если  $M = 0$  (**свободный гироскоп**), получим:  $\vec{L} = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ .

Возведем  $L$  в квадрат:  $I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2\omega_{\perp}^2 = \text{const} \Rightarrow$  модули компонент  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  будут постоянными,  $\Rightarrow$  остается постоянным угол между  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$ , а также между  $\vec{L}$  и осью  $AA'$ .

Т.к.  $\vec{L} = \text{const}$ , то ось фигуры гироскопа ( $AA'$ ) и мгновенная ось вращения равномерно вращаются вокруг  $\vec{L}$  с некоторой угловой скоростью  $\vec{\omega}_L$  (вообще говоря, не равной  $\vec{\omega}$ ). Наблюдается **регулярная прецессия гироскопа**.

Под действием внешних сил возникает **вынужденная прецессия**. Ее проще объяснить приближенной теорией.

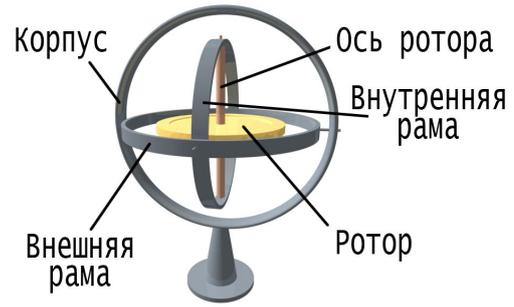
Рассмотрим случай, когда вращение гироскопа вокруг  $AA'$  намного быстрее вращения вокруг перпендикулярной оси, т.е.  $L_{\parallel} \gg L_{\perp}$ . Тогда  $\vec{L} \approx I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} \approx I_{\parallel}\vec{\omega}$ .  $\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$  — момент внешних сил,  $\vec{a}$  — РВ точки приложения силы.

Найдем  $\vec{\Omega}$  — вектор угловой прецессии:  $\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$ . Если  $M$  обусловлен только действием силы тяжести, то  $|\vec{\Omega} \times \vec{L}| = \Omega L \sin \alpha$ ;  $|\vec{M}| = mgl \sin \alpha \Rightarrow$

$$\Omega = \frac{mgl}{\mathcal{I}_{\parallel}\omega}.$$

Т.к. угол между  $L$  и  $AA'$  постоянен, то  $\theta = \text{const} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ . Т.о., угловая скорость нутации равна нулю и кинематические уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \end{cases}$$



## Гироскопические силы

Вычислим момент сил, вызывающих прецессию.

По теореме Резаля,  $\vec{M}^{(e)} = \dot{\vec{V}} \equiv \dot{\vec{L}}, \Rightarrow \dot{\vec{V}} = \vec{\Omega} \times \vec{L}, \vec{L} = \mathfrak{J}_{\parallel} \vec{\omega},$

$$\vec{M}^{(e)} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \mathfrak{J}_{\parallel} [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}].$$

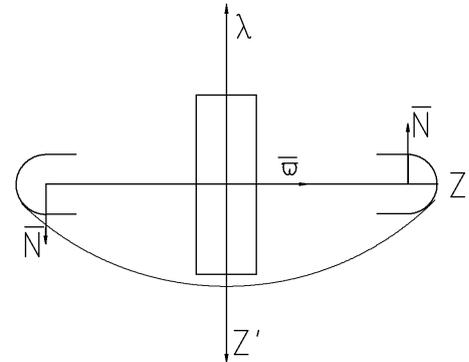
Применим одно из следствий ПдА:  $\vec{M}^{(e)} + \vec{M} = 0,$  где  $\vec{M}$  — момент всех сил инерции гироскопа относительно его неподвижной точки — **гироскопический момент**. Тогда

$$M = \mathfrak{J}_{\parallel} \omega \Omega \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол нутации.

Видно, что гироскопический момент равен нулю, если  $\Omega = 0$  или же ось гироскопа перпендикулярна оси прецессии.

**Правило Жуковского:** *если быстро вращающемуся гироскопу сообщают вынужденное прецессирующее движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.*



## 10 Деформации

### Деформации и напряжения в твердых телах

Под действием приложенных сил все твердые тела меняют свою форму или объем. Такие изменения называются **деформациями**. Различают два предельных случая деформаций: *упругие*, исчезающие после прекращения действия приложенных сил, и *пластические*, сохраняющиеся в теле после снятия воздействия. Тела, претерпевающие лишь упругие деформации, называют *идеально упругими*. Ограничимся рассмотрением малых деформаций, при

которых величина деформации пропорциональна первой степени приложенной силы (**закон Гука**).

**Напряжением** называют силу, действующую на единицу площади бесконечно малой площадки, расположенной внутри тела. Ориентацию площадки  $dS$  можно задать вектором нормали,  $\vec{n}$ . Тогда напряжение обозначим как  $\vec{\sigma}_n$ . Вектор напряжений можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие, а также его можно характеризовать компонентами  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$  и  $\sigma_{nz}$ . Здесь первый индекс указывает направление нормали к площадке, а второй — направление оси, на которую проецируется напряжение  $\vec{\sigma}_n$ .

Рассмотрим треугольную пирамиду, являющуюся сечением первого октанта наклонной плоскостью. Второй закон Ньютона для нее примет вид

$$m\vec{a} = \vec{f} + \sigma_n S + \vec{\sigma}_{-x} S_x + \vec{\sigma}_{-y} S_y + \vec{\sigma}_{-z} S_z.$$

Здесь  $\vec{f}$  — равнодействующая объемных сил (например, силы тяжести), действующих на пирамиду. Стягивая данную пирамиду в точку, в результате предельного перехода получим:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z.$$

Таким образом, *напряжение в каждой точке упруго деформированного тела можно характеризовать тремя векторами  $\sigma_{\mathbb{N}}$  или девятью проекциями  $\sigma_{\mathbb{N}\square}$* . Совокупность этих величин называется **тензором упругих напряжений**.

Рассматривая момент сил, действующих на элементарный объем, получим:

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV = I_z \frac{d\omega_z}{dt},$$

или, т.к. момент инерции,  $I_z$ , — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $dV$  (т.к.  $I_z \propto \rho dV l^2$ ), получим:  $\boxed{\sigma_{\mathbb{N}\square} = \sigma_{\square\mathbb{N}}}$ , т.е. *тензор упругих деформаций симметричен*.

Можно выбрать систему координат так, чтобы свести тензор деформаций к диагональному виду. Такая СК называется **главной**, а соответствующие координатные оси — главными осями тензора напряжений.

## Модуль Юнга

Напряжения, получаемые стержнем в результате сжатия или растяжения называют, соответственно, **давлением**,  $P$ , и **натяжением**,  $T$ .  $P = -T = F/S$ . Полученное изменение длины стержня,  $\Delta l$ , называют **абсолютным** удлинением или сжатием, кроме того вводят понятие **относительного** удлинения (сжатия):  $\varepsilon = \Delta l/l_0$ .

Для малых деформаций справедлив **закон Гука**: *натяжение (давление) при малых деформациях пропорционально относительному удлинению (сжатию)*:  $T = E\varepsilon$ . Постоянная  $E$ , зависящая лишь от материала и физического состояния стержня, называется **модулем Юнга**.

Более общая форма закона Гука: *в случае упругих деформаций натяжение является однозначной функцией относительного удлинения*:

$$T = \mathcal{E}\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \dots$$

Таким образом, расчеты с использованием закона Гука верны лишь с относительной ошибкой порядка  $\varepsilon$ , т.е. для вычисления  $\varepsilon$  можно пользоваться и формулой  $\varepsilon = \Delta l/l$ .

*Принцип суперпозиции малых деформаций* гласит, что деформацию, полученную в результате действия нескольких сил, можно вычислить как сумму деформаций от каждой силы в отдельности.

При деформации внешняя сила расходует энергию, переходящую в **упругую энергию** деформации. При квазистатическом удлинении стержня на  $\Delta l$  под действием переменной силы  $F$ , упругая энергия,  $U$ , и ее объемная плотность,  $u$ , равны

$$U = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2, \quad u = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}.$$

где  $k$  – **коэффициент упругости**, выражающийся через модуль Юнга, а  $F = k\Delta l$  по закону Гука.

## Коэффициент Пуассона

Под действием силы  $F$  изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня: при растяжении поперечные размеры стержня уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются.

**Относительным поперечным сжатием** (растяжением) называется аналогичная  $\varepsilon$  величина  $-\Delta a/a$ . Отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему продольному удлинению называется **коэффициентом Пуассона**:

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}.$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие коэффициенты можно выразить через  $E$  и  $\mu$ .

## Частные случаи упругих деформаций

### Сдвиг

Деформация сдвига приводит к плоскопараллельному перемещению одной поверхности тела относительно другой на угол  $\gamma$ . Малый сдвиг ( $\gamma \ll 1$ ) характеризуется законом  $\tau = G\gamma$ , где  $\tau$  — касательное напряжение на сдвигаемой поверхности,  $G$  — **модуль сдвига**.  $G$  можно выразить через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, т.к. сдвиг эквивалентен одновременному растяжению и сжатию тела в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Тогда, т.к.  $u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \tau^2/(2G) = (1 + \mu)\tau^2/E$ , получим:  $G = E/[2(1 + \mu)]$ .

### Кручение

Кручение — поворот выбранной плоскости в теле относительно другой плоскости на угол  $\varphi$ . Деформации растяжения, сжатия и сдвига однородны. Однако, при кручении деформация внутри тела меняется от точки к точке. Закон Гука при кручении выглядит так:  $M = f\varphi$ , где  $M$  — вращающий момент,  $f$  — **модуль кручения**.

Т.к.  $M = 2\pi r \delta r \cdot \tau r$ , где  $\tau$  – касательное напряжение, получим:

$$u = \frac{1}{2} \frac{M\varphi}{V} = \frac{1}{2} \frac{2\pi r \delta r \tau r \varphi}{2\pi r l \delta r} = \frac{\pi \tau^2 r^3 \delta r}{f l}.$$

Выражая энергию через модуль сдвига, получим:

$$f = \frac{2\pi G r^3 \delta r}{l}, \quad \Rightarrow \quad \text{для трубки:} \quad f = \frac{\pi G}{2l} (r_2^4 - r_1^4).$$

## Изгиб

Изгиб является осесимметричной деформацией, при которой ближняя к оси изгиба поверхность сжимается, а дальняя — растягивается. При этом в теле существует поверхность, вдоль которой деформация равна нулю. Она называется **нейтральной**.

Пусть  $R$  – радиус кривизны нейтральной линии,  $\alpha$  – центральный угол, опирающийся на дугу деформации. Тогда  $l_0 = R\alpha$ . Пусть некоторое волокно расположено на расстоянии  $\xi$  от нейтрального сечения. Если брус не слишком толст ( $|\xi| \ll R$ ), то длина волокна  $l = (R + \xi)\alpha$ , а удлинение,  $\Delta l = \xi\alpha$ . Следовательно, натяжение вдоль него,  $\tau = E\xi/R$ .

В данном случае момент сил натяжения,  $M_\tau = EI/R$ , где  $I = \int \xi^2, dS$  – **момент инерции**. Интегрируя общее выражение для момента инерции, можно получить частные выражения для конкретных тел.

Если учесть, что  $R = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ , то при  $y' \ll 1$  квадратом производной можно пренебречь. В этом случае  $M_\tau = EIy''$ .

## 11 Механика жидкостей и газов

**Основы гидро- и аэростатики. Закон Паскаля. Сжимаемость жидкостей и газов. Основное уравнение гидростатики**

Сжимаемость веществ характеризуется **коэффициентом сжимаемости**:  $\gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$  и **модулем вектора сжатия**:  $K = \gamma^{-1}$ .

Для газов  $K = \frac{RT}{V} = p$ .

У жидкостей сжимаемость чрезвычайно мала, поэтому часто вводят модель *абсолютно несжимаемой жидкости*. **Уравнением состояния** называется характеристическое уравнение  $p = f(\rho, T)$ .

Действующие на вещество силы делятся на поверхностные и объемные. Например, объемной является сила тяжести  $F = \rho g V$ , поверхностной — давление  $F = pS$ .

Покоящиеся среды изучают **гидро- и аэростатика**.

На единицу объема покоящейся жидкости действует сила  $\vec{F}_V = -\text{grad } p$ :

$$\vec{F}_V = \frac{\partial \vec{F}}{\partial V} = -\frac{\partial(p\vec{S})}{\partial V} = -\vec{S} \frac{\partial p}{\partial V} = -\text{grad } \vec{p}.$$

**Основным уравнением гидростатики** называют уравнение равновесного состояния ( $\vec{F}_V + \vec{f} = 0$ ):

$$\boxed{\vec{f} = \text{grad } p.}$$

Аналогично, основным уравнением гидродинамики является уравнение Эйлера  $\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \vec{f} - \text{grad } p$ .

**Закон Паскаля:** *при отсутствии объемных сил в случае равновесия давление во всех точках жидкости одинаково.* Действительно: если  $\vec{f} = 0$ , то  $\text{grad } p = 0$ , откуда  $p = \text{const}$ . В частности, при отсутствии внешних сил жидкость находится в равновесии лишь в случае постоянства давления на ее поверхность; давление на поверхность возбуждает такое же давление во всех точках жидкости.

## Распределение давления в покоящейся среде в поле силы тяжести

В данном случае  $\vec{f} = \frac{\vec{P}}{V} = \rho \vec{g}$ . Пусть  $OZ$  — вертикальная ось, тогда  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ . Т.о., получаем совокупность эквибарных плоскостей, параллельных  $OZ$ .

Т.е. при механическом равновесии  $p$ ,  $T$  и  $\rho$  являются функциями только  $z$  и не зависят от  $x$  и  $y$ . Считая жидкость несжимаемой, получим:  $p = p_0 - \rho g z$ .

**Закон Архимеда:** на любой элемент жидкости, находящейся в состоянии равновесия, действует равнодействующая сила давления, направленная вверх и равная весу выделенного объема жидкости. На погруженное в жидкость тело действует направленная против силы тяжести сила, равная весу вытесненной телом жидкости.

**Гидростатический парадокс:** сила давления жидкости на дно сосуда не зависит от формы сосуда, а только от площади дна, разности уровней поверхности жидкости и дна, а также плотности жидкости.

## Барометрическая формула

Обратимся теперь к гидростатике сжимаемой жидкости (или газа). Наибольший интерес здесь представляет атмосфера Земли. Предположим, что состав атмосферы не зависит от высоты (что не совсем верно). На элемент объема атмосферы действует сила тяжести:  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ . Для атмосферы выполняется уравнение Менделеева–Клапейрона:  $p = \frac{RT}{\mu} \rho$ .

В результате получим:  $p' = -\frac{\mu g}{RT} p$ . Считая атмосферу изотермической (что также неверно), получим:  $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$ . Получим **барометрические формулы**:

$$\boxed{p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)} \quad \boxed{\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)}.$$

При подъеме на высоту  $H = RT/(\mu g)$  давление убывает в  $e$  раз. Эту высоту называют **высотой однородной атмосферы** (высота атмосферы с постоянной плотностью, дающая то же давление  $p_0$ ). Таким образом,

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

## Стационарное течение жидкости. Линии тока

**Поле скоростей** — картина распределения скоростей жидкости в любой ее точке. Если поле скоростей не меняется с течением времени, жидкость

движется стационарно. Линии тока при стационарном движении жидкости совпадают с траекториями частиц. **Линия тока** — траектория движения частиц жидкости.

Возьмем произвольный замкнутый контур  $C$ , через каждую точку которого проведем линии тока — **трубку тока**. Естественно, жидкость не может пересечь боковую поверхность трубки тока.

За время  $dt$  через полное сечение трубки тока пройдет масса жидкости  $dm = \rho v S dt$ . Для двух поперечных сечений трубки тока  $S_1$  и  $S_2$  выполняется уравнение:  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ . Для несжимаемой жидкости получим уравнение:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

## Уравнение Бернулли

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости в поле силы тяжести. Вычислим работу, совершаемую силами давления при перемещении бесконечно малого объема жидкости вдоль трубки тока.

При перемещении верхней границы  $B$  на  $l_1$  совершается работа  $A_1 = p_1 S_1 l_1 = p_1 \Delta V_1$ , или же  $A_1 = p_1 \Delta m_1 / \rho_1$ . При перемещении границы  $C$  на  $l_2$  совершается работа против сил давления  $p_2$ :  $A_2 = p_2 \Delta m_2 / \rho_2$ .

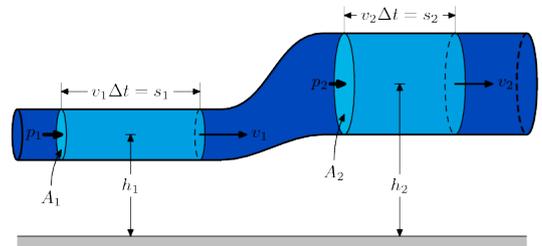
Если движение стационарно, то  $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m \Rightarrow A = A_1 - A_2 = \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \Delta m$ .

Пусть  $\mathcal{E}$  — полная энергия единицы массы жидкости. Тогда  $\Delta E = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \Delta m$ . Приравнявая эту величину работе, получим:  $\mathcal{E}_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \mathcal{E}_2 + \frac{p_2}{\rho_2}$ , или же:

$$\boxed{\mathcal{E} + \frac{p}{\rho} = \text{const}} \quad \text{— уравнение Бернулли.}$$

Для несжимаемой жидкости  $E = T + U = mv^2/2 + mgh \Rightarrow \mathcal{E} = v^2/2 + gh$ . Тогда уравнение Бернулли примет вид:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}}$$



В случае горизонтальной трубки тока:  $v^2/2 + p/\rho = \text{const} \Rightarrow$  давление будет больше там, где меньше скорость, и наоборот.

**Несжимаемой** жидкостью можно считать в случае, когда  $|\Delta\rho| \ll \rho$ . В этом случае, т.к.  $\Delta p = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$ ,  $\Delta\rho = \frac{1}{c^2}\Delta p$  (здесь  $c$  — скорость звука), получим **критерий несжимаемости** жидкости в горизонтальной трубке:  $|v_2^2 - v_1^2| \ll c^2$ . Для вертикальных трубок:  $g\Delta h \ll c^2$ .

## Парадокс д'Аламбера

На любое тело со стороны потока жидкости действует сила  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$  ( $\vec{F}_x$  параллельна потоку,  $\vec{F}_y$  перпендикулярна ему).

Если рассмотреть стационарное течение несжимаемой жидкости, огибающей тело, получается, что *импульсы жидкости до и после тела остаются постоянными, следовательно, лобовое сопротивление равно нулю* — **парадокс д'Аламбера**. Т.о., при определении  $\vec{F}_x$  нельзя считать жидкость идеально несжимаемой.

Рассматриваемое действие идеальной жидкости не распространяется на  $\vec{F}_y$  и момент, действующий на тело.

Если тело движется неравномерно, оно захватывает с собой **присоединенную массу** жидкости, оказывающей сопротивление движению тела, что не приводит к парадоксу д'Аламбера.

## Циркуляция

Все движение жидкостей делится на потенциальное (ламинарное) и вихревое (турбулентное). Пусть  $\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{s}$  — циркуляция скорости по контуру  $C$ . Если  $\Gamma = 0$ , движение будет потенциальным, иначе — вихревым.

В случае потенциального течения можно ввести функцию  $\varphi$  — **потенциал скоростей**:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ .

**Ротор (циркуляция) скорости:**

$$\text{rot } \vec{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{v} d\vec{s}.$$

Произвольное движение жидкости можно разложить на вращение и потенциальное течение. Пусть жидкость вращается с частотой  $\omega$  по окружности. Тогда  $\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{v} = 2\omega}$ . Т.е. циркуляцию скорости можно рассматривать как удвоенную угловую скорость вращения жидкости около данной точки.

## Подъемная сила. Формула Жуковского

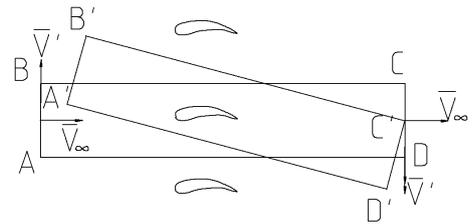
Для возникновения подъемной силы, естественно, необходима несимметричная форма крыла (иначе силы давления сверху и снизу компенсируются).

При обгibanии воздухом крыла за ним образуются вихри. Эти вихри регулярно отрываются от крыла и возникают вновь (благодаря силам вязкости, линия отрыва перемещается вверх, затем вихрь усиливается и возвращается обратно).

Зависимость подъемной силы от циркуляции поля скоростей воздуха была установлена независимо друг от друга Жуковским и Куттом. Их формула относится к крылу бесконечного размаха и относится к единице длины такого крыла.

Благодаря вязкости, циркуляция является однозначной функцией скорости и угла атаки.

Рассмотрим совокупность крыльев, расположенных так далеко друг от друга, что введение дополнительных крыльев пренебрежимо мало влияет на искажение течения воздуха вблизи другого крыла. Пусть  $v_\infty$  — скорость невозмущенного потока,  $v'$  — скорость, обусловленная циркуляцией.



Через время  $dt$  газ переместится из плоскости  $ABCD$  в  $A'B'C'D'$ . Рассчитаем приращение импульса  $d\vec{l}$ .

Так как слева и справа  $v_\infty = v_\infty$ , то приращение получит лишь вертикальная компонента импульса:  $dI_y = I_{C'DD'} - I_{A'ABB'} = -2lv_\infty \rho v' dt$  (т.к.  $l = AB = CD$ ;  $C'DD' = A'ABB' = lv_\infty dt$ ).  $2lv' = \Gamma_{ABCD}(\vec{v}')$ . В то же

время,  $\Gamma = \Gamma(\vec{v})$ , т.к.  $v_\infty$  не вносит вклада в циркуляцию, следовательно,

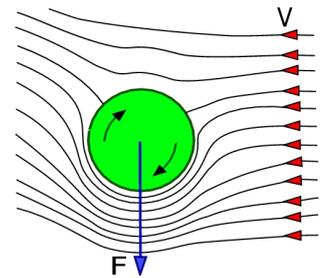
$$dI_y = -\Gamma \rho v_\infty dt, \quad \frac{dI}{dt} = F, \quad \boxed{F_y = \Gamma \rho v_\infty}.$$

Последняя формула называется **формулой Жуковского–Кутта**.

Здесь  $\Gamma$  — циркуляция вектора скорости вдоль любого замкнутого контура вокруг крыла;  $v_\infty$  — скорость невозмущенного потока.

## Эффект Магнуса

Если вращающийся цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха, возникает подъемная сила, перпендикулярная направлению внешнего потока — **эффект Магнуса**.



При вращении тела захватывается приповерхностный слой воздуха. Обдуваемый воздух, взаимодействуя с потоком приповерхностного слоя, образует вихри (столкновение противоположно направленных потоков приводит к тому, что вихрь образуется против направления вращения цилиндра).

Подъемная сила в этом случае также определяется формулой Жуковского–Кутта.

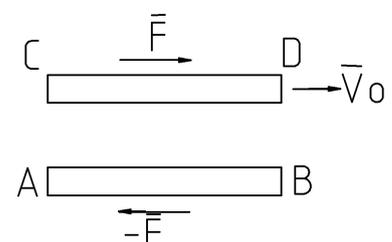
## 12 Движение вязкой жидкости

### Вязкая жидкость. Течение вязкой жидкости по трубе

В реальных жидкостях, помимо сил нормального давления, действуют еще и касательные силы вязкости на границах движущихся элементов жидкости.

Для стационарного течения жидкости в трубе необходимо поддерживать разность давлений в начале и в конце трубы, компенсирующую силы вязкого трения.

Рассмотрим 2 параллельные бесконечно длинные пластинки, между которыми находится слой жидко-



сти. Пусть пластинка  $AB$  неподвижна, а пластинка  $CD$  движется с постоянной скоростью.

Чтобы поддерживать равномерное движение пластины  $CD$ , к ней необходимо приложить силу  $F$  в сторону движения, а на пластину  $AB$  должна действовать такая же сила, направленная противоположно, чтобы удержать ее в покое.

Сила  $F$  была экспериментально установлена Ньютоном:

$$F = \eta S \frac{v_0}{h},$$

где  $\eta$  — **вязкость** жидкости (не зависит от материала пластины),  $S$  — площадь пластины,  $h$  — расстояние между пластинами.

За счет трения в трубе скорость зависит от расстояния трубки тока от центра трубы:  $\vec{v} = \vec{v}(r)$ .

## Уравнение Навье–Стокса

Введем тензор напряжений,  $\mathbf{T}$ , действующих на элементарный объем жидкости.

На произвольную наклонную площадку с нормалью  $\vec{n}$  действует напряжение  $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_x\alpha + \vec{\tau}_y\beta + \vec{\tau}_z\gamma$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — направляющие косинусы нормали. В проекциях:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau_{nx} = \tau_{xx}\alpha + \tau_{yx}\beta + \tau_{zx}\gamma; \\ \tau_{ny} = \tau_{xy}\alpha + \tau_{yy}\beta + \tau_{zy}\gamma; \\ \tau_{nz} = \tau_{xz}\alpha + \tau_{yz}\beta + \tau_{zz}\gamma; \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{\tau}_n = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Для жидкости выполняется **уравнение неразрывности**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

(для несжимающейся жидкости  $\rho = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$ ).

На элемент  $dS$  выделенной части сплошной поверхности действует поверхностная сила  $\vec{\tau}_n dS$ , на замкнутый объем  $V$  действует сила  $\int_S \vec{\tau}_n dS$ . Исходя из принципа д'Аламбера, получим:

$$\int_V (\vec{F} - \vec{a})\rho dV + \int_S \vec{\tau}_n dS = 0,$$

где  $\vec{F}$  – плотность объемной силы:  $\vec{F} = \frac{d\vec{F}_{об}}{\rho dV}$ ,  $\vec{a}$  – ускорение за счет сил инерции  $\vec{a}\rho dV$  ( $\vec{F}_{об} + \vec{a}m - \vec{i} = 0$ ,  $\vec{i}$  – сила инерции).

**Формула Остроградского–Гаусса:**

$$\int_S \vec{\tau}_n dS = \int_S (\vec{\tau}_x \alpha + \vec{\tau}_y \beta + \vec{\tau}_z \gamma) dS = \int_V \left( \frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z} \right) dV.$$

Получим: 
$$\int_V \left( -\vec{a}\rho + \vec{F}\rho + \frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Из последнего отношения получим уравнение движения сплошной среды в напряжениях:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z}.$$

При равновесии  $\vec{a} = 0 \Rightarrow \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z} = 0.$

Для упругих сплошных сред тензор  $\mathbf{T}$  зависит от тензора скоростей деформации  $\mathbf{S}$ . Экспериментально установлено, что в простейших случаях  $\mathbf{T}$  линейно зависит от  $\mathbf{S}$  (**реологическое уравнение**):

$$\boxed{\mathbf{T} = a\mathbf{S} + b\mathbf{I}}, \quad \text{где } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичный тензор, } a, b \text{ – скалярные}$$

компоненты. Коэффициент  $a$  должен характеризовать жидкость.

Пусть  $a = 2\eta$ , где  $\eta$  – **коэффициент динамической вязкости**.

Коэффициент  $b$  может линейно зависеть лишь от линейных инвариантов тензоров  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$ . Для этого подставим в реологическое уравнение эти инварианты ( $\mathbf{I}$  – инвариант себя самого):

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 2\eta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + 3b.$$

Обозначим для краткости  $\theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}$  (**относительная скорость объемного расширения**),  $\Rightarrow b = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) - \frac{2}{3}\eta\theta$ .

На рассматриваемый элемент  $V$  действует давление  $p = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$  (среднее арифметическое нормальных напряжений с обратным знаком),  $\Rightarrow b = -p - \frac{2}{3}\eta\theta$ . Для некоторых жидкостей  $p$  еще и линейно зависит от  $\theta$ :  $p = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) + \lambda'\tau$ , где  $\lambda'$  – **второй коэффициент вязкости**. Тогда  $b = -p + \lambda\theta$ , где  $\lambda = \lambda' - \frac{2}{3}\eta$  (это более общий случай, т.к. при  $\lambda' = 0$  получим  $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$ ). Окончательно получим реологическое уравнение в виде:

$$\boxed{\mathbf{T} = 2\eta\mathbf{S} + (\lambda\theta - p)\mathbf{I}},$$

которое эквивалентно шести **уравнениям Навье–Стокса**:

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -p + \lambda\theta + 2\eta\sigma_{xx}, \\ \tau_{yy} = -p + \lambda\theta + 2\eta\sigma_{yy}, \\ \tau_{zz} = -p + \lambda\theta + 2\eta\sigma_{zz}; \end{cases} \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\eta\sigma_{xy}, \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = 2\eta\sigma_{yz}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = 2\eta\sigma_{xz}. \end{cases}$$

Здесь  $\sigma_{\aleph\beth} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{\aleph}}{\partial \beth} + \frac{\partial v_{\beth}}{\partial \aleph}\right)$ ,  $\aleph, \beth = \overline{x, y, z}$ ;  $\theta = \operatorname{div} \vec{v}$ .

В частном случае движения несжимаемой жидкости ( $\theta = 0$ ) параллельно оси  $OX$  получим:  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \eta\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ . Пусть  $\tau = \tau_{xy}$ , тогда получим **закон Ньютона** для касательных напряжений в несжимаемой жидкости:

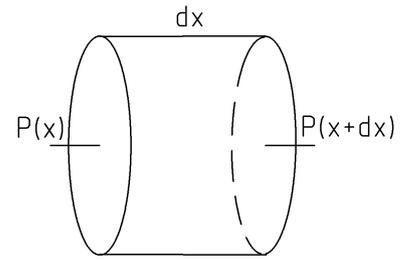
$$\boxed{\tau = \eta\frac{dv}{dy}}.$$

## Формула Пуазейля

Выделим в трубе произвольную бесконечно короткую часть длины  $dx$  и радиуса  $r$ . На ее боковую поверхность действует сила вязкости  $dF = -2\pi r\eta\frac{dv}{dr}dx$ . На основания цилиндра действует сила разности давлений:

$$dF_1 = \pi r^2(p(x) - p(x + dx)) = -\pi r^2\frac{dp}{dx}dx.$$

При стационарном течении  $dF = dF_1 \Rightarrow 2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dp}{dx}$ . Т.к.  $\frac{dv}{dr}$  не зависит от  $x$ , то  $\frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{p_2 - p_1}{l} = \Delta p/l$ , где  $l$  – длина трубы,  $p_1$  – давление на входе трубы,  $p_2$  – на выходе.  $\Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \Rightarrow v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + \mathfrak{C}$ . При  $r = R$   $v = 0 \Rightarrow \mathfrak{C} = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \Rightarrow v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$ . В цилиндре  $v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$ .



Расход жидкости  $dQ = 2\pi r \rho v dr \Rightarrow Q = \pi \rho \frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$ , откуда получим **формулу Гагена–Пуазейля**:  $Q = \pi \rho \frac{\Delta p}{8\eta l} R^4$ .

Кроме того, ее можно записать как  $Q = \pi \rho R^2 v_0 / 2$ . С другой стороны, если  $\langle v \rangle$  – средняя скорость потока, то  $Q = \pi \rho R^2 \langle v \rangle \Rightarrow \langle v \rangle = \frac{v_0}{2}$ . Формула Гагена–Пуазейля *применима только для ламинарных течений* жидкости.

## Закон подобия

Рассмотрим поток жидкости, обтекающей систему тел. Наряду с ним можно ввести бесконечное множество подобных и подобно расположенных тел, обтекаемых другими жидкостями. Тогда необходимо определить параметры потока и постоянные, характеризующие эти жидкости, чтобы оба потока были механически подобными. Это играет роль в судо- и самолетостроении для изучения аэродинамических свойств на моделях.

Пусть  $\vec{r}$  – РВ жидкости в подобных точках,  $\vec{v}$  – скорость в этих точках,  $l$  – характерный размер,  $\vec{v}_0$  – характерная скорость потока,  $\rho$  – плотность,  $\eta$  – вязкость,  $c$  – скорость звука,  $g$  – ускорение свободного падения (если существенно влияние силы тяжести),  $\tau$  – характерное время изменения течения.

Ввиду наличия уравнений движения, между перечисленными характеристиками должна наблюдаться функциональная связь. Из них можно составить шесть независимых безразмерных комбинаций:  $\frac{\vec{v}}{v_0}$ ,  $\frac{\vec{r}}{l}$ ,  $\text{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}$  – **число Рейнольдса** (здесь  $\nu = \eta/\rho$  – **кинематический коэффициент вязкости**);  $\text{F} = \frac{v_0^2}{gl}$  – **число Фруда**;  $\text{M} = \frac{v_0}{c}$  – **число Маха**;  $\text{S} = \frac{v_0 \tau}{l}$  –

**число Струхалия.**

Согласно правилу размерностей, одна из этих комбинаций должна являться функцией остальных, например,  $\vec{v}/v_0 = f(r/l, \text{Re}, F, M, S)$ .

Т.о., если для двух течений пять из шести комбинаций совпадают, то будут совпадать и шестые. Это — **общий закон подобия течений**. Такие течения называются **гидродинамически подобными**.

Число Рейнольдса по порядку величин есть отношение кинетической энергии жидкости к ее потере, обусловленной работой сил вязкости на характерной длине:  $T \propto \frac{1}{2}\rho v_0^2 l^3$ ,  $A_{\text{вяз}} \propto F_{\text{вяз}} l = \eta \frac{v_0}{l} l^2 l = \eta v_0 l^2 \Rightarrow T/A_{\text{вяз}} \propto \rho v_0 l / \eta$ .

Следовательно, это число определяет роль инерции и вязкости жидкости при течении. При больших значениях числа Рейнольдса главную роль играет инерция, а при малых — вязкость.

Число Фруда определяет отношение кинетической энергии к ее приращению, обусловленному работой силы тяжести на пути, равном  $l$ .

В случае несжимаемых жидкостей  $c \rightarrow \infty \Rightarrow$  число Маха будет равно нулю.

Для стационарных течений  $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow$  число Струхалия также будет стремиться к бесконечности, откуда:

$$\vec{v} = v_0 \cdot f(\vec{r}/l, \text{Re}, F).$$

Т.о., стационарные течения несжимаемых жидкостей подобны, если они имеют равные числа Рейнольдса и Фруда. В некоторых частных случаях достаточно лишь равенства одной из пар:

1. **критерий Рейнольдса:** равенство чисел Рейнольдса у двух жидкостей выполняется в случае малых значений  $\text{Re}$  и больших  $F$ , когда изменение числа Фруда слабо сказывается на течении жидкости;
2. **критерий Фруда:** аналогично, равенство чисел Фруда достигается при малых  $F$  и больших  $\text{Re}$ .

## Ламинарные и турбулентные течения

**Ламинарные** течения характеризуются регулярностью, траектории частиц жидкости параллельны оси трубы. **Турбулентные** течения происходят при больших скоростях и являются неустойчивыми, сопровождаются возникновением вихрей.

При возрастании  $v_0$  ламинарное течение переходит в турбулентное при некотором значении скорости  $v_{кр}$  – **критической скорости**. В гидродинамически подобных системах переход от ламинарного течения к турбулентному должен происходить при равных значениях числа Рейнольдса:  $Re = Re_{кр}$ . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса происходит турбулентность.  $Re_{кр} \sim 10^3 \div 10^4$ .

В данном случае формула Пуазейля примет вид:  $Q = c(Re) \frac{\Delta p}{l \eta} \rho S^2$ , где  $S = \pi a^2$ ,  $a$  – радиус трубы.

При ламинарном течении  $c$  зависит лишь от форму трубы, а при турбулентном – и от значения числа Рейнольдса,  $Re = \langle v \rangle a / \nu = \langle v \rangle a \rho / \eta$ .

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{Q \eta}{\rho S^2 c(Re)} = \frac{Q \eta}{\rho \pi a^2 c(Re)} = \frac{2Q \eta}{\pi \langle v \rangle a \rho 2ac(Re)} = \frac{2Q \rho \langle v \rangle^2}{\pi Re c(Re) \langle v \rangle \rho 2a},$$

или  $\frac{\Delta p}{l} = \frac{\lambda(Re)}{a} \cdot \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}$ . Здесь  $\lambda(Re) = \frac{2}{\pi c(Re) Re}$  – **коэффициент сопротивления трубы**. При турбулентном течении коэффициент сопротивления имеет экспоненциальную зависимость от числа Рейнольдса.

## Лобовое сопротивление. Формула Стокса

Вязкая жидкость действует на тело, движущееся в ней, с силой  $\vec{F}$ . Свойства жидкости характеризуются величинами  $\rho$ ,  $\nu$  и  $\eta$ , а свойства тела – характерным размером  $l = \sqrt{S}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения тела.

Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации: число Рейнольдса и  $F/(\rho \nu^2 S)$ . Согласно правилу размерностей, одна из них является функцией второй,  $\Rightarrow \vec{F} = \frac{\rho \nu^2}{2} S \vec{R}(Re)$ . Величину  $\vec{R}$  называют **коэффициентом лобового сопротивления**, а его проекцию  $R_y$  –

**коэффициентом подъемной силы.**

$\vec{R}$  является функцией числа Рейнольдса только при  $v < c$ , иначе она будет зависеть и от числа Маха.

При больших  $\text{Re}$   $F_x$  будет обусловленной почти исключительно разностью давлений в трубе.

Рассмотрим теперь случай малых  $\text{Re}$ . Тогда  $F_x$  почти исключительно определяется вязкостью, т.е. не зависит от  $\rho$ . Это может быть лишь если  $c_x = A/\text{Re}$ , где  $A$  – безразмерная константа. Тогда:

$$F_x = \frac{\rho v^2}{2} S \cdot \frac{A\eta}{\rho l v} \propto A\eta l v \quad (\text{Re} \ll 1).$$

$A$  зависит от формы тела и его ориентации относительно потока. Для шара значение  $A$  получено Дж. Стоксом:  $A = 6\pi$ . Лобовое сопротивление шара радиуса  $r$  описывает **формула Стокса**:

$$F_x = 6\pi\eta r v.$$

## 13 Колебательное движение

### Собственные одномерные колебания. Гармонические колебания

**Колебания** — процессы, в той или иной степени повторяющиеся во времени (механические, электромагнитные, электромеханические). **Свободные** (собственные) колебания — колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних воздействий и возникающие вследствие отклонения системы от положения равновесия. **Периодические** колебания — колебания, происходящие с повторением всех характеризующих систему величин через определенные равные промежутки времени  $T$ . **Гармонические** колебания — подчиняющиеся гармоническому закону  $S(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Одномерным называется движение с одной степенью свободы. Если точка движется в одномерной потенциальной яме, ее движение является финитным, причем *одномерное финитное движение является колебательным*.

Рассмотрим случай, когда на точку действует квазиупругая сила  $F = -kx$ , возвращающая ее в положение равновесия. Тогда  $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x = \mathfrak{C}_1 \cos \omega_0 t + \mathfrak{C}_2 \sin \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Пусть  $\mathfrak{C}_1 = A \sin \alpha$ ,  $\mathfrak{C}_2 = A \cos \alpha$ , получим **уравнение колебания** гармонического осциллятора (ГО):  $x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ .

Фазовой траекторией ГО является **эллипс**:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}; \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Полуоси эллипса равны  $a = \sqrt{2mE}$ ,  $b = \sqrt{2E/k}$ . Площадь эллипса:  $\pi ab = 2\pi E/\omega_0 = E/\nu$  — функция энергии и частоты системы.

Гармонические колебания удобно изображать графически: **метод векторных диаграмм**. Введем на плоскости  $XOY$  вектор  $\vec{A}$ , составляющий с осью  $OX$  угол  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  (фаза в данный момент времени), модуль которого равен амплитуде колебаний. Тогда  $A_y = S = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Т.е. колебания  $S$  можно рассматривать как колебания проекции  $A_y$  вектора, вращающегося против часовой стрелки в плоскости  $XOY$  с угловой скоростью  $\omega$ .

## Сложение гармонических колебаний

**Сложение колебаний** — это нахождение закона результирующих колебаний системы в случаях, когда она одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.

В сложении колебаний интересны два предельных случая: одинаково направленные колебания и взаимно перпендикулярные колебания.

### Сложение одинаково направленных колебаний

Пусть  $S_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ ,  $S_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ ,  $S = S_1 + S_2 = A(t) \sin \Phi(t)$ . Пусть  $\Phi_i = \omega_i t + \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Рассмотрим сумму на фазовой диаграмме:  $\vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$ . По теореме косинусов,  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2}.$$

**Когерентными** называют такие колебания, у которых  $\frac{d}{dt}(\Phi_2 - \Phi_1) \equiv 0$ , т.е. у них должны быть равными собственные частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .  $\Rightarrow$

$$S = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ,  $\text{tg } \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$ .

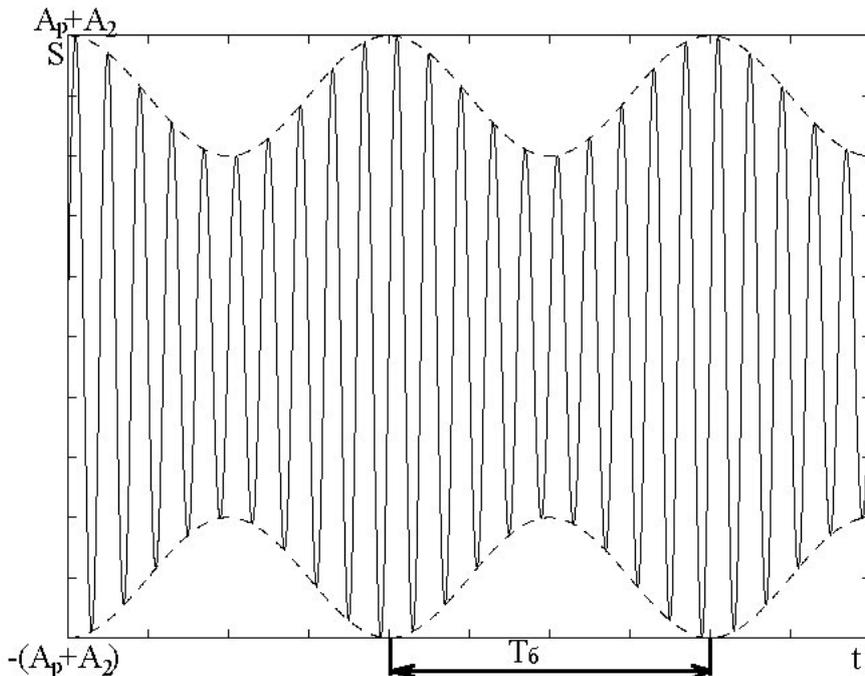
Видно, что в зависимости от сдвига фаз  $\Delta\varphi$ :

$$A = \{|A_1 - A_2|, \Delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi; \quad A_1 + A_2, \Delta\varphi = \pm 2\pi m\}.$$

**Некогерентные** колебания можно приближенно считать когерентными лишь в течение промежутков времени, за которые  $\Delta\Phi$  не успевают значительно измениться:  $|\omega_1 - \omega_2|\Delta t \ll 2\pi$ , или  $\Delta t \ll \tau_{\text{ког}}$ , где  $\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$  — **время когерентности**.

## Биения

Если  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ , наблюдаются **биения**.



Начнем отсчитывать время от момента  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ :  $S_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ ,  $S_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \varphi(t))$ , где  $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t$ .

В этом случае  $S = A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \psi(t))$ , где  $A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi(t)$ ,  $\operatorname{tg} \psi(t) = \frac{A_2 \sin \varphi(t)}{A_1 + A_2 \cos \varphi(t)}$  ( $\psi$  — угол между векторами  $A_1$  и  $A_2$ ).

В частности, при  $A_1 = A_2 = A_0$ :  $A(t) = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ ;  $\psi(t) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ . Так что

$$S = 2A_0 \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \varphi_0 \right).$$

$A(t)$  изменяется от  $|A_2 - A_1|$  до  $A_1 + A_2$  с частотой  $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$  — **циклическая частота биений**. Т.к.  $\Omega \ll \omega$ , то  $A$  условно называют **амплитудой биений**. Период биений:  $T = 2\pi/\Omega = (|T_2^{-1} - T_1^{-1}|^{-1})$ , частота биений  $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$ .

**Гармонический анализ** Любое сложное периодическое колебание можно представить в виде разложения в ряд Фурье с основной циклической частотой  $\omega$ :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad \text{или} \quad S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t);$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S \sin n\omega t dt.$$

Негармонические же колебания можно представить в виде интеграла Фурье:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega.$$

**Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу**

Рассмотрим два перпендикулярных колебания  $x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  и  $y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ . Их траектория — эллипс, причем колеблющаяся точка опи-

сывает его за период  $T = 2\pi/\omega$ . Данный вид колебаний является **эллиптически поляризованным**. Траектория колебаний в общем случае описывается уравнением:

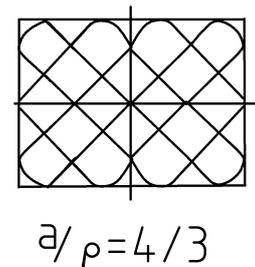
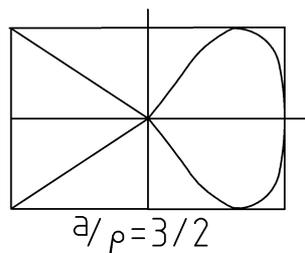
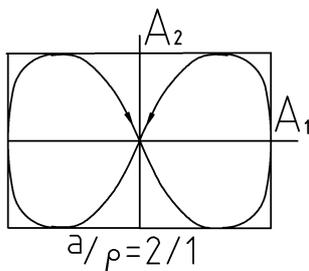
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2m+1}{2}\pi$ , то уравнение колебаний примет вид  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ , т.е. размеры его полуосей равны амплитудам импульсов.

Если же  $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ , то эллипс вырождается в отрезок:  $y = (-1)^m \frac{A_1}{A_2} x$ .

Пусть теперь  $\omega_1 = p\omega$ ,  $\omega_2 = q\omega$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа. Тогда траекторией колебаний будет замкнутая кривая, форма которой зависит от отношения  $p/q$  — **фигуры Лиссажу**. Значения координат повторяются через равные промежутки времени  $T_0$ , являющиеся наименьшим общим кратным периодов  $T_1 = \frac{2\pi}{p\omega}$  и  $T_2 = \frac{2\pi}{q\omega}$ .

Отношение  $p/q$  равно отношению числа касаний соответствующей фигуры Лиссажу со сторонами прямоугольника, в которую она вписана, параллельными осям  $x$  и  $y$  соответственно.



## Затухающие колебания

### Колебания под действием потенциальных сил

Рассмотрим потенциальную обобщенную силу  $Q(q)$ , действующую на осциллятор. Т.к. действующая сила  $\vec{F}$  — потенциальная, то  $\vec{F} = -\text{grad} U$ , и в

положении равновесия  $q = q_0$ ,  $Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = 0$ . Если равновесие устойчивое, то  $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ . Пусть  $U(q) = U(q_0 + x)$ .

Разложим  $U(q)$  в ряд Тейлора:

$$U(q_0 + x) = U(q_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} \cdot x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} \cdot x^2 + \dots; \quad U(q_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} = 0.$$

Пренебрежем членами выше  $x^2$ , тогда

$$U(q_0 + x) \approx \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} \cdot x^2; \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} = k > 0 \quad \Rightarrow \quad U(q_0 + x) = \frac{kx^2}{2}, \quad q = kx.$$

Таким образом, получили частоту колебаний:  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

### Затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания

Если параметры, характеризующие существенные в рассматриваемом процессе физические свойства системы, не изменяются со временем, такая система называется **линейной**. Будем рассматривать для простоты именно линейные системы.

Пусть на систему действует сила вязкого трения, пропорциональная  $\dot{x}$ :  $F_{\text{тр}} = -\gamma\dot{x}$ . Тогда колебания системы будут описываться уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $2\beta = \gamma/m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$  (считаем, что систему приводит в колебание квазиупругая сила  $F_{\text{упр}} = -kx$ ).

Решением уравнения движения является функция  $x = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$ , где  $s_{1,2}$  — корни уравнения  $s^2 + 2\beta s + \omega_0^2 = 0$ , для которого дискриминант  $D_1 = \beta^2 - \omega_0^2$ . Следовательно, вид колебаний зависит от соотношения  $\omega_0$  и  $\beta$ . Возможны три варианта:

1.  $\beta < \omega_0$ . В этом случае затухание невелико.  $s = -\beta \pm i\omega$ , где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — **условная частота** затухающих колебаний. Колебания имеют вид:

$$X = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Период колебаний:  $T = 2\pi/\omega = 2\pi(\omega_0^2 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $X = x_0 e^{-\beta t}$  — амплитуда затухающих колебаний.

**Логарифмический декремент затухания:**  $\delta = \ln X(t) - \ln X(t + T) = \beta T = T/\tau = 1/N$ , где  $N$  — число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшилась в  $e$  раз,  $\tau = \beta^{-1}$  — **время релаксации**.  $\omega = 2\pi\beta/\delta$ .

**Добротность** колебательной системы является функцией ее энергии  $W(t)$ :  $Q = 2\pi W(t)[W(t) - W((t + T))]^{-1}$ . Т.к.  $W \propto X^2$ , получим:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}},$$

при малых  $\delta$   $Q = \pi/\delta = \omega_0/(2\beta) = \gamma^{-1}\sqrt{km}$ .

2.  $\beta = \omega_0$ . Условный период,  $T = \infty$ ,  $\omega = 0$ . Колебания чисто экспоненциальные:  $X = x_0 e^{-\beta t}$ .
3.  $\beta > \omega_0$ :  $X = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$ ,  $\alpha_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Колебание в данном случае будет **апериодическим**.

## 14 Вынужденные колебания

### Установление вынужденных колебаний. Амплитудные и фазовые траектории

Пусть на систему действует сила  $F(t)$  и  $F_x(t)$  — ее проекция на прямую, вдоль которой происходят колебания. Тогда в общем случае

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Общее решение данного уравнения ищем в виде  $x = x_1(t) + x_2(t)$ , где  $x_2$  — одно из частных решений неоднородного уравнения,  $x_1$  — решение однородного уравнения  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .  $x_1 = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

За время релаксации  $\tau$  амплитуда уменьшится в  $e$  раз, еще через некоторое время она будет пренебрежимо мала, следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  система

совершает колебания, обусловленные только составляющей  $x_2(t)$ . Он переходит в **состояние установившихся вынужденных колебаний** с частотой вынуждающей силы.

Пусть  $F_x = f_0 \cos \Omega t$ , тогда  $x = A \cos(\Omega t + \varphi_0)$ . Решая уравнение движения, получим:  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$  — **сдвиг фаз** между колебаниями и вынуждающей силой;  $A = f_0[m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2]^{-1/2}$  — амплитуда вынужденных колебаний.

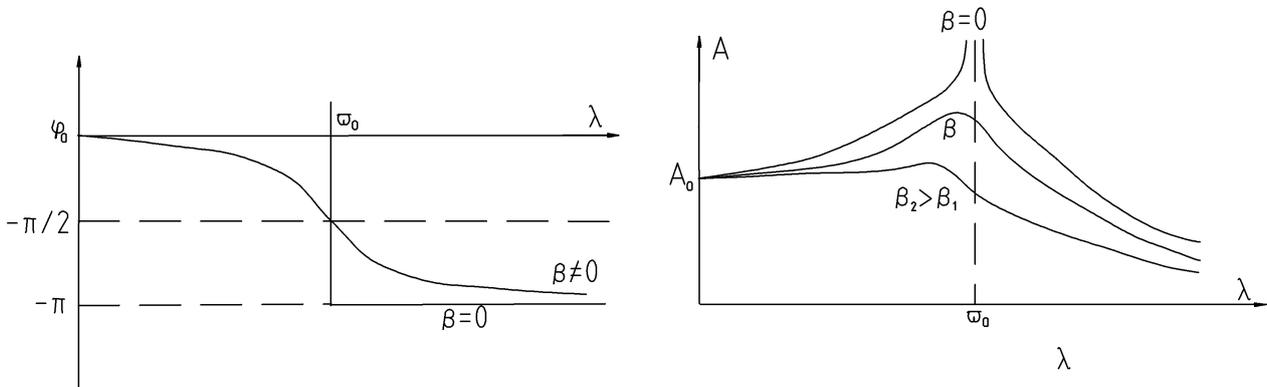
## Резонанс

Пусть  $\beta = 0$ . Тогда  $A = f_0[m|\omega_0^2 - \Omega^2|]^{-1}$ . При  $\omega_0 = \Omega$ ,  $A \rightarrow \infty$  — наблюдается **резонанс**.

При резонансе фаза  $\varphi_0$  испытывает скачек.

Теперь пусть  $\beta \neq 0$ . Найдем резонансную частоту из условия  $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$ :

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \text{ При этом } A = f_0[2m\beta\Omega_{\text{рез}}]^{-1}.$$



Пусть  $A_0 \equiv A(\omega_0)$ . Тогда получим, что  $A_0 < A_{\text{рез}}$ . С ростом сопротивления  $\beta$  максимальная амплитуда уменьшается и смещается влево:

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

## Параметрическое возбуждение. Автоколебания

**Автоколебательная система** — генератор незатухающих колебаний. Стоит из источника энергии и колебательного контура, периодически подпитывающегося от источника. Для поддержания колебаний не требуется внешних воздействий. Автоколебания начинаются самопроизвольно под воздействием флуктуаций.

**Параметрический резонанс** наблюдается при изменении параметров системы так, что частота внешних воздействий  $\omega_{\text{Внеш}} = 2\omega_0$ .

Подвесим маятник на блок и будем поднимать его в среднем положении и опускать в крайних. Тогда по ЗСМИ МИ в среднем положении маятника будет сохраняться, следовательно, при поднятии маятник будет двигаться с большей скоростью и отклоняться на больший угол. Опуская его в крайних положениях мы не уменьшаем амплитуды колебаний (в этих положениях  $L = 0$ ), но уменьшаем потенциальную энергию маятника, что приводит к увеличению энергии колебательного движения.

Аналогично можно доказать, что если таким же образом изменять длину подвеса маятника, находящегося в состоянии покоя, причем соблюдать условие  $\omega_{\text{Внеш}} = 2\omega_0$ , за счет флуктуаций положения маятника он придет в колебательное движение.

## 15 Волны в сплошной среде и элементы акустики

### Волны. Распространение колебаний давления и плотности в среде

Процесс распространения колебаний в пространстве называется **волной**. Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания частиц, либо изменить ее плотность, то вследствие взаимодействия между частицами это возмущение будет распространяться в среде от частицы к частице с некото-

рой скоростью  $c$ .

Если, например, на одном из концов металлического стержня создать деформацию сжатия или растяжения (ударив молотком по торцу или резко оттянув его), то из-за взаимодействия атомов решетки между собой граница возмущения начнет двигаться к противоположному концу стержня.

Это явление легко обобщить на случай действия переменной силы  $\vec{F}$  с периодом  $T$  и частотой  $\nu$ .

## Длина волны, период, фаза и скорость волны

Если на тело действует переменная сила  $\vec{F}$ , изменяющаяся по гармоническому закону, в нем будут распространяться волны с **периодом**  $T_0$ , равным периоду действующей силы и **частотой**, равной частоте этой силы.

**Длина волны** есть расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц в среде. Таким образом,  $\boxed{\lambda = cT}$ , где  $c$  — скорость распространения колебаний.

Определим  $c$ . Пусть  $m$  — масса деформируемой части среды в момент времени  $t$ ,  $v$  — скорость движения частиц. Тогда  $d(mv) = F dt$ . Т.к. за время  $t$  возмущение проходит путь  $l = ct$ , то  $m = \rho Sct$ , где  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — поперечное сечение стержня;  $p = FS$  — давление в возмущенной области, следовательно,  $d(\rho Sctv) = pS dt \Rightarrow \boxed{p = \rho cv}$ .

Давление связано с относительным сжатием стержня  $\varepsilon = \Delta l/l$  соотношением  $p = E\varepsilon$ , где  $E$  — **модуль Юнга**. Рассмотрим случай  $v \ll c$  (малые возмущения). К моменту  $t$  удлинение  $\Delta l = vt$ , т.к. невозмущенная часть стержня покоится, а возмущенная двигалась со скоростью  $v \Rightarrow \varepsilon = v/c \Rightarrow$

$$\begin{cases} p = Ev/c, \\ p = \rho cv; \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{E/\rho}}.$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , имеют вид  $A = a \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega$  — частота колебаний,  $\alpha$  — величина, зависящая от  $x$ . Выражение  $\varphi = \omega t + \alpha$  называется **фазой волны**.

В точке  $x \neq 0$  колебания имеют вид:  $A = a \cos(\omega[t - \tau] + \alpha)$ , где  $\tau$  – время, на которое колебания в точке с координатой  $x$  отстают от колебаний в начале координат.  $\tau = x/c \Rightarrow A = a \cos(\omega[t - x/c] + \alpha)$  — **уравнение плоской волны**.

Зафиксируем фазу:  $\omega(t - x/c) = \text{const}$  и предположим, что  $dt - dx/c = 0$ . Тогда  $dx/dt = c$ . Т.о., скорость перемещения волны совпадает с ее **фазовой скоростью** (скоростью перемещения фазы).

Пусть  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — **волновое число** ( $k = \omega/c$ ), тогда уравнение волны можно записать в виде  $A = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$ .

## Продольные и поперечные волны в среде

Рассмотрим примитивную 1-мерную цепочку связанных шариков. Если колебание будет распространяться только вдоль цепочки в виде сгущений и разрежений, его называют **продольной волной**. Если же направление колебаний перпендикулярно направлению распространения волны, ее называют **поперечной**.

В общем случае распространения волны в сплошной среде имеются как продольная, так и поперечная составляющие.

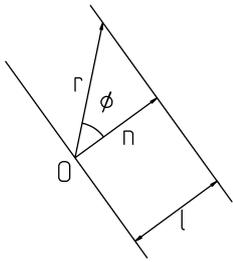
Для поперечной волны  $c_{\perp} = \sqrt{E'/\rho}$ , где  $E'$  – модуль одностороннего сжатия.

Рассчитаем скорость распространения поперечной волны. Касательное напряжение  $\tau = \rho c_{\perp} v = G\gamma$ , где  $\gamma$  – угол сдвига,  $G$  – модуль сдвига. За время  $t$  конец стержня сдвигается на угол  $\gamma = v/c_{\perp}$ . Т.к.  $v \ll c$ , получим:

$c_{\perp} = \sqrt{G/\rho}$ . Справедливо отношение  $c_{\parallel} > c_{\perp}$ .

## Уравнение бегущей волны. Волновое уравнение

Рассмотрим волну, распространяющуюся в произвольном направлении. **Волновая поверхность** — геометрическое место точек, колеблющихся с одинаковой фазой.



Возьмем волновую поверхность, отстающую от начала координат на расстояние  $l$ . Колебания в ней имеют вид  $A = a \cos(\omega t - kl + \alpha)$ . Проведем к волновой поверхности произвольный вектор  $\vec{r}$  под углом  $\varphi$  к нормали  $\vec{n}$ .  $\vec{n}\vec{r} = \cos \varphi = l \Rightarrow$  уравнение волны  $A = a \cos(\omega t - k\vec{n}\vec{r} + \alpha)$ . Пусть  $\vec{k} = k\vec{n}$ , тогда

$$A = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \quad \text{— уравнение бегущей волны.}$$

Продифференцируем теперь это уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\omega^2 a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2 A; & \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= -k_y^2 A; \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2 A; & \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} &= -k_z^2 A; \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -k^2 A$ ;  $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 A$ . Т.к.  $\frac{\omega}{k} = v$ , получим **волновое уравнение**:

$$\Delta A = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Одномерный случай:  $A'' = v^{-2} \ddot{A}$ .

## Волны в струне, стержне, газах и жидкостях

В струне устанавливаются т.н. **стоячие волны** — суперпозиция двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Т.к. стоячие волны возможны лишь при условии  $l = \lambda n/2$  (иначе они будут затухать), то в струне возбуждаются только колебания с длинами волны  $\lambda_n = 2l/n$ , где  $l$  — длина струны и  $\nu_n = c/\lambda_n = cn/(2l)$  — собственные частоты струны. Они кратны частоте  $\nu_1 = c/(2l)$  — **основная частота** или **первая гармоника**. Таким образом, в струне происходят только поперечные колебания.

В стержне, в связи с малой  $c_{\perp}$ , можно пренебречь поперечными колебаниями. Следовательно, в нем возникают лишь продольные колебания, подчиняющиеся тем же ограничениям, что и поперечные колебания в струне.

В газах колебания представляют собой звуковую волну — чередование областей повышенных и пониженных давлений. Т.о., в газах невозможно распространение поперечных волн — происходит распространение сферической продольной волны.

На поверхности жидкости возникают как продольные, так и поперечные волны. В глубине жидкости, в основном, преобладают продольные волны (как и в газах).

### Связь скорости звука с параметрами среды

Связь скорости звука с параметрами твердой среды уже была показана. В газах наблюдается аналогия:  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность газа соответственно.

Т.к.  $p = \rho RT / \mu$ , то  $c = \sqrt{\gamma RT / \mu}$ .

### Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова-Пойнтинга

Пусть в некоторой среде распространяется в направлении  $Ox$  плоская продольная волна  $A = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$ . Выделим в среде бесконечно малый объем  $dV$ . Он обладает кинетической энергией  $dT = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 dV$  и потенциальной энергией  $dU = \frac{E \varepsilon^2}{2} dV = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 dV$ . Т.к.  $c^2 = E / \rho$ , то  $dU = \frac{\rho c^2}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 dV$ . Полная энергия:  $dE = dT + dU = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 c^2 \right] dV$ .

Плотность энергии:  $w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 c^2 \right]$ .

Таким образом,  $w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$ . Средняя плотность энергии  $\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2$ . Поток энергии  $\Phi = \frac{dE}{dt}$ . Плотность потока энергии  $j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp} \Delta t}$ .  $dE = w \Delta S_{\perp} c \Delta t \Rightarrow j = wc$ .

Вводя  $j$  как вектор, получим:  $\vec{j} = w\vec{c}$ . Среднее значение плотности потока энергии волны называется **вектором Умова-Пойнтинга**:

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{c} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 c.$$

Зная  $j$ , можно вычислить  $\Phi$ :  $d\Phi = \vec{j} d\vec{S}$ ,  $\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ ,  $\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle dS = \langle j \rangle S = \langle j \rangle \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \langle \Phi \rangle = 2\pi \rho \omega^2 c a_r^2 r^2$ , где  $a_r$  — амплитуда колебаний на расстоянии  $r$ . Если энергия не поглощается средой,  $\Phi = \text{const} \Rightarrow a_r^2 r^2 = \text{const} \Rightarrow a_r \propto 1/r$ .

## Звуковые волны. Интенсивность и тембр звука

**Звуковые волны** (звук) — упругие волны, распространяющиеся в воздухе с частотой  $16 \div 20000$  Гц. Колебания с частотой меньше 16 Гц называют **инфразвуком**, а с частотой больше 20 кГц — **ультразвуком**.

Если спектр звука сплошной, его называют **шумом**. Если же спектр состоит из дискретных частот (т.е. линейчатый) — тональным звуком.

**Тембр** звука определяется относительной интенсивностью **обертонов** — колебаний с частотами  $2\nu$ ,  $3\nu$  и т.д.

**Интенсивность** звука ( $I$ ) определяется средним по времени значением плотности потока энергии, которую несет звуковая волна. Определение интенсивности звука или амплитуды звуковой волны может быть произведено по величине тех механических сил, с которыми звуковая волна действует на то или иное тело.

**Порог слышимости** — минимальная интенсивность звука, вызывающая звуковые ощущения.

Субъективно человек ощущает изменение громкости звука медленнее, чем изменяется его интенсивность (все органы чувств «работают» в логарифмическом масштабе), поэтому **уровень громкости** звука измеряется в логарифмических величинах — децибелах (дБ):  $L = 20 \lg(I/I_0)$ , где  $I$  — интенсивность звука,  $I_0$  — условная интенсивность, соответствующая 0 дБ (несколько превышает средний порог слышимости). Для мощности  $L = 10 \lg(W/W_0)$  (следует

обратить внимание, что бел — логарифм отношения энергии сигнала к энергии, условно считаемой нулем отсчета; множитель 10 — результат того, что фактически используется дробная единица — децибел).

При групповом движении частиц со скоростями, большими скорости звука в среде, возникает **ударная волна**. Под ударной волной понимают распространение в газообразной, жидкой или твердой среде поверхности, на которой происходит скачкообразное повышение давления, сопровождающееся изменением плотности, температуры, скорости движения среды. Эта поверхность называется **поверхностью разрыва**. Ударная волна возникает при взрывах, движении тел со сверхзвуковой скоростью, а также в луче мощного лазера.

## Эффект Доплера

Пусть источник звуковой волны движется со скоростью  $v_{\text{ист}}$  к наблюдателю. Тогда для наблюдателя испущенные источником за единицу времени колебания уложатся на длине  $c - v_{\text{ист}}$ , тогда если  $v_{\text{пр}}$  — скорость приемника, получим:

$$\lambda = \frac{c - v_{\text{ист}}}{\nu_0}, \quad \nu = \frac{c + v_{\text{пр}}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \nu_0 \frac{c + v_{\text{пр}}}{c - v_{\text{ист}}}}.$$

В системе координат приемника  $\Delta\lambda = -\lambda_0 \frac{v_{\text{ист}}}{c}$ .



# Молекулярная физика и термодинамика

## 16 Статистический подход к описанию молекулярных явлений

### Статистические закономерности и описание системы многих частиц

В механике для описания систем применяется **динамический** метод, заключающийся в знании координат и скоростей всех частиц системы. В молекулярной физике это невозможно в связи с огромным числом частиц в системе.

Такие системы описывают **статистическим** методом, пользуясь статистическими закономерностями. Кроме того, квантово-механические закономерности по своей природе являются статистическими, так что этот метод вполне оправдан.

В статистической физике вводится понятие **случайной величины** — величины, точное значение которой невозможно заранее предсказать.

Для характеристики случайной величины  $x$  вводится понятие **вероятности**:  $p(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N}$  и **плотности вероятности**  $\rho = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta V_i}$ , где  $\Delta V_i$  — объем в фазовом пространстве. Вероятность отвечает условию нормировки:  $\int \rho dV = 1$ .

**Среднее значение** случайной величины

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sum_j p_j x_j = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) x dx.$$

**Функция распределения вероятности** — это функция  $F(x_0) = p(x < x_0)$ ,  $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \rho(x) dx$ .

Большинство случайных величин имеют **нормальное** (Гауссово) **распределение**:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma} \right)^2 \right],$$

где  $\sigma^2 = \langle x - \langle x \rangle \rangle^2$  — **дисперсия** величины  $x$ .

Т.о., при достаточно больших  $N$  систему из  $N$  частиц можно характеризовать лишь величинами  $\langle x \rangle$ ,  $\sigma$  и  $\rho(x)$ .

Молекулярную систему, в которой взаимодействие между частицами ничтожно мало (газы при нормальных условиях), можно характеризовать при помощи статистических методов.

## Тепловое равновесие систем

**Тепловое** (термодинамическое) **равновесие** — такое состояние системы, когда ее параметры со временем не изменяются (стационарное состояние). При этом средние кинетические энергии молекул разных сортов и молекул в разных пространственных частях одинаковы и характеризуются **температурой** тела:  $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}kT$ .

**Принцип детального равновесия:** любой микроскопический процесс в равновесной микроскопической системе протекает с той же скоростью, что и обратный ему процесс.

**Статистической системой** называют ограниченный объем с заключенными в него частицами. **Статистическим ансамблем** называют совокупность одинаковых статистических систем.

## Каноническое распределение Гиббса для системы в термостате

**Фазовым пространством** (ФП) называют  $6N$ -мерное ( $N$  — число частиц) пространство  $3N$  координат и  $3N$  импульсов частиц системы. Каждая частица системы характеризуется определенной точкой в ФП, а вся система занимает некоторый объем  $\Delta\Gamma$  ФП. **Фазовая траектория** — траектория, описываемая точкой в ФП при совершении некоторого процесса.

**Теорема Лиувилля:** функция распределения вероятностей микросостояний квазинезависимой подсистемы постоянна вдоль фазовых траекторий.

Согласно теореме Лиувилля,  $\Delta\Gamma = \text{const}$  (элемент объема ФП, занимаемый системой в процессе движения точек элемента остается постоянным,

хотя его форма может меняться).

Найдем функцию распределения плотности вероятности энергии  $\rho(E)$  для пространственного случая строго замкнутой системы с постоянной энергией  $E_0$ .

Элемент объема ФП, занимаемый ситемой, ограничен изоэнергетической поверхностью  $E(p, q) = E_0$ . Т.о., вероятность того, что точка окажется вне изоэнергетической поверхности, равна нулю, но вероятность оказаться внутри равна 1 ( $\delta$ -функция Дирака). Свойства  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0),$$

$$\delta(cx) = \frac{1}{c} \delta(x), \quad \delta(x - b) = \begin{cases} 0, & x \neq b, \\ \infty, & x = b. \end{cases}$$

Т.о.,  $\rho$  можно представить в виде  $\rho(p, q) = c\delta[E(p, q) - E_0]$ . Постоянная  $c$  определяется из условия нормировки:  $\sum \rho = 1$ . Получим **микрoканоническое распределение Гиббса**:  $dW = c\delta(E - E_0)d\Gamma$ , где  $dW$  – вероятность того, что изображаемая точка окажется внутри фазового объема  $d\Gamma$ .

Найдем  $\rho$  в случае, когда система обменивается энергией с окружающими телами, например, посредством теплопередачи. При этом будем считать систему **изотермической**, т.е. находящейся в тепловом равновесии.

Выделим в системе, состоящей из  $N$  частиц (энергия системы  $E$ ), подсистему из  $n \ll N$  частиц с энергией  $\varepsilon(p, q)$ , тогда  $E' = E - \varepsilon$  – энергия остальной части системы (среды).

Т.к. вся система замкнута, то  $dW = c\delta[E' - (E - \varepsilon)]d\Gamma$ .  $d\Gamma = d\gamma d\Gamma'$ , где  $d\gamma$  – элемент  $6n$ -мерного подпространства подсистемы,  $d\Gamma'$  – элемент  $6(N - n)$ -мерного подпространства. Следовательно,  $dW = c\delta[E' - (E - \varepsilon)]d\gamma d\Gamma'$ . Чтобы найти вероятность попадания точки в элемент объема фазового  $6n$ -мерного пространства, проинтегрируем  $d\Gamma'$ :

$$dw = c d\gamma \int \delta[E' - (E - \varepsilon)] d\Gamma' = cd\gamma \int \delta[E' - (E - \varepsilon)] \frac{d\Gamma'}{dE'} dE'.$$

Пусть  $f(E') = \frac{d\Gamma'}{dE'}$  — чрезвычайно быстро растущая функция  $E'$ . Тогда

$$dw = c d\gamma \int \delta[E' - (E - \varepsilon)] f(E') dE' = f(E - \varepsilon) d\gamma, \quad \Rightarrow \quad \rho = f(E - \varepsilon).$$

$\rho$  является **мультипликативной** функцией, т.е. ее значение для всей системы равно произведению ее частей. Чтобы удовлетворить этому условию, положим:  $\rho = \exp(\sigma[E - \varepsilon])$ , где  $\sigma(E - \varepsilon)$  — некоторая аддитивная функция энергии. Т.к.  $\varepsilon \ll E$ , то приближенно  $\sigma(E - \varepsilon) = \sigma(E) - \frac{\partial \sigma}{\partial E} \varepsilon \Rightarrow \rho = A \exp(-\varepsilon/\theta)$ , где  $\theta = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial E} \Big|_{\varepsilon=0}\right)^{-1}$

Так как  $\int \rho d\gamma = 1$ , получим:  $A = \left(\int \exp(-\varepsilon/\theta) d\gamma\right)^{-1}$ . **Интеграл состояний**  $Z = \int \exp(-\varepsilon/\theta) d\gamma$ . Параметр  $\theta$  называют **статистической температурой**. Из условия сходимости  $Z$  следует, что  $\theta > 0$ .  $\theta$  является функцией состояния всей системы ( $\theta = kT$ ).

Итак, т.к.  $\rho(p, q) = \frac{1}{Z} \exp(-\varepsilon(p, q)/(kT))$ , получим **каноническое распределение Гиббса**:

$$dw = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon(p, q)}{kT}\right) d\gamma.$$

Можно представить  $Z$  как  $Z = \exp(-F/\theta)$ , тогда  $F = -kT \ln Z$  — **свободная энергия**. Отсюда  $\rho = \exp((F - \varepsilon)/\theta)$ .

## Статистическая сумма и термодинамические потенциалы

Рассмотрим случай дискретных  $\varepsilon$ :  $\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\frac{\varepsilon}{kT})$ ,  $\sum \rho_i = 1 \Rightarrow Z = \sum \exp(-\frac{\varepsilon_i}{kT})$  — **статистическая сумма**  $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{\exp(-\frac{\varepsilon}{kT})}{\sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_i}{kT})}, \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum \varepsilon_i \exp(-\frac{\varepsilon_i}{kT})}{\sum \exp(-\frac{\varepsilon_i}{kT})} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial(kT)} \equiv -\frac{\partial \ln Z}{\partial \theta}.$$

### Термодинамические потенциалы.

Метод термодинамических потенциалов развит Гиббсом. Исходным является основное уравнение термодинамики:  $TdS = dU + \sum A_i da_i$ , позволяющее для

некоторой системы ввести функции состояния — **термодинамические потенциалы** — функции, дифференциалы которых являются полными, а сам потенциал — функция двух параметров:

1. **внутренняя энергия:**  $U = U(S, T)$ ,  $dU = TdS - pdV$ ;
2. **свободная энергия:**  $F = U - TS$ ,  $dF = -SdT - pdV$ ;
3. **энтальпия:**  $I = U + pV$ ,  $dI = TdS - Vdp$ ;
4. **термодинамический потенциал Гиббса:**  $\Phi = F + pV$ ,  $d\Phi = -SdT + Vdp$ .

Следовательно,  $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ ;  $p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ ;  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ ;  $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ ;  
 $T = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_p$ ;  $V = \left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_S$ ;  $T = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p$ ;  $V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T$ . Отсюда следуют соотношения Максвелла:  $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$ ;  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ ;  
 $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$ ;  $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ .

Уравнение Гиббса-Гельмгольца:

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

## 17 Идеальный газ

**Модель идеального газа. Равновесное пространственное распределение частиц идеального газа**

**Идеальный газ** — такой газ, у которого можно пренебречь взаимодействием молекул (ближе всего к модели идеального газа подходят разреженные газы). **Внутренние параметры** газа определяются физическими объектами системы. **Внешние параметры** определяются объектами, не входящими в состав данной системы.

**Макроскопическое состояние** газа определяется его давлением, объемом и температурой. **Микроскопическое состояние** является функцией

$6N$  переменных фазового пространства ( $N$  – число частиц газа). **Равновесное состояние** – стационарное макроскопическое состояние газа, находящегося в изолированном от внешней среды объеме  $V$ . **Статистический ансамбль** – совокупность одинаковых **статистических систем** (ограниченных областей пространства с заключенными в них частицами).

С квантовой точки зрения, одна частица занимает в ФП объем

$$d\Gamma = (dx dy dz dp_x dp_y dp_z)_0 = (2\pi\hbar)^3.$$

**Постулат равновероятности:** т.к. все ячейки для каждой из частиц равновозможны, то и распределения частиц по ячейкам также равновозможны (равновероятность микросостояний).

## Биномиальное распределение (Бернулли)

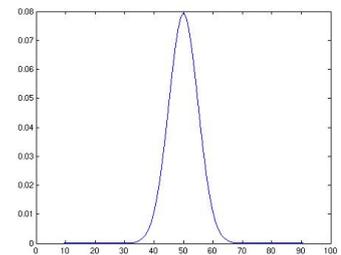
Рассчитаем вероятность макросостояния.

Пусть  $V$  – объем идеального газа,  $n$  – число находящихся в нем частиц,  $N \gg n$  – число ячеек, которые могут занимать частицы ( $N \propto V/d^3$ , где  $d \sim 10^{-10}$  м – диаметр частиц). Найдем вероятность  $P(V, m)$  такого макроскопического состояния системы, при котором в некотором фиксированном объеме  $V_1 < V$  находится  $m \leq n$  частиц. Число ячеек в объеме  $V_1$  равно  $N_1 \geq m$ .

Т.о., из  $n$  частиц мы должны обнаружить в объеме  $V_1$  их долю  $m$  и не обнаружить  $n - m$  частиц. Эта вероятность равна  $p^m q^{n-m}$  ( $q = 1 - p$ ,  $p$  – вероятность нахождения частицы в  $V_1$ ). Так как частицы неразличимы между собой, то данную вероятность мы должны умножить на сочетание из  $n$  по  $m$  ( $C_n^m$ ).

Получим **формулу Бернулли:**

$$P(V_1, m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$



Также эта формула называется **биномиальным распределением** из-за

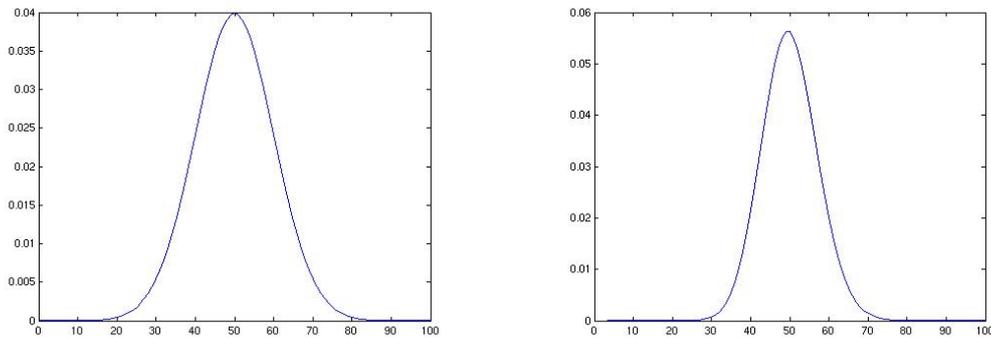
аналогии с биномом Ньютона:

$$(p+q)^n = q^n + \frac{n}{1!}pq^{n-1} + \dots + \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} + \dots + p^n = \sum_{m=0}^n P(V_1, m) = 1.$$

При больших  $n$  можно использовать **формулу Стирлинга**:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad \text{или} \quad \ln n! \approx n \ln n - n.$$

### Предельные случаи: распределения Пуассона и Гаусса



Распределения Гаусса (слева) и Пуассона (справа).

При  $n \rightarrow \infty$  биномиальное распределение стремится к предельному виду, зависящему от условий стремления к бесконечности:

1.  $n \rightarrow \infty$ ,  $p = \text{const}$  — **нормальное (Гауссово) распределение**. Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где  $a = \langle x \rangle$ ,  $\sigma^2 = D$  — **дисперсия** величины  $x$  ( $\sigma$  — **стандартное отклонение**  $x$  от  $a$ ).

2.  $n \rightarrow \infty$ ,  $np = \text{const}$  — **распределение Пуассона**. Пусть  $\langle m \rangle$  — среднее число частиц в объеме  $V_1$ , тогда

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left( \frac{\langle m \rangle}{n} \right)^m \left( 1 - \frac{\langle m \rangle}{n} \right)^{n-m}.$$

Раскроем произведение:

$$\frac{n!}{(n-m)!n^m} = \underbrace{(n-m+1) \cdots n}_{m \text{ штук}} \cdot n^{-m} = \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1.$$

Воспользуемся замечательным пределом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

После всех преобразований, переходя к пределу, получим выражение для распределения Пуассона:

$$P(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \exp(-\langle m \rangle).$$

## Молекулярная теория давления идеального газа

Предположим, что, во-первых, давление не зависит от формы сосуда, тогда мы сможем рассматривать сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ ; во-вторых, будем считать, что удар молекул о стенку сосуда является абсолютно упругим; в-третьих, т.к. в равновесном состоянии все направления движения молекул равновероятны, будем считать, что молекулы движется вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, параллельных ребрам параллелепипеда.

Т.о., из  $N$  молекул сосуда вдоль каждого направления движется  $N/3$  штук, а в определенную сторону —  $N/6$  штук.

Допустим, что все молекулы имеют одинаковые скорости. За единицу времени грань, перпендикулярная ребру  $a$  испытывает  $[v/(2a)][N/3] = (Nv)/(6a)$  соударений. Число ударов за единицу времени о единицу поверхности сосуда равно

$$\nu = \frac{Nv/(6a)}{bc} = \frac{1}{6} \frac{Nv}{abc} = \frac{1}{6} \frac{N}{V} v = \frac{1}{6} nv.$$

Допустим, что скоростью  $v_i$  обладают  $Vn_i$  молекул, тогда:  $\nu = \sum \nu_i = \frac{1}{6} \sum n_i v_i$ ,  $\langle v \rangle = \sum n_i v_i / n \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{6} n \langle v \rangle}$ .

Одна молекула  $i$ -й группы передает стенке импульс  $k_{i0} = 2mv_i$ . Суммарный импульс от всей  $i$ -й группы равен

$$k_i = k_{i0}v_i = 2mv_i \frac{1}{6}n_iv_i = \frac{1}{3}n_imv_i^2, \quad k = \frac{1}{3}m \sum n_iv_i^2.$$

$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum n_iv_i^2 \Rightarrow k = \frac{1}{3}mn \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3}n \langle mv^2/2 \rangle$ . Так как сила  $F = \frac{dk}{dt}$ , получим, что давление  $p = \frac{dk}{Sdt}$ , т.е. оно равно рассчитанному нами суммарному импульсу  $k$ :

$$p = \frac{2}{3}n \langle E_{\text{Пост.}} \rangle,$$

где  $\langle E_{\text{Пост.}} \rangle$  – средняя энергия поступательного движения молекул газа.

## Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

**Уравнение состояния** — соотношение, определяющее связь между параметрами состояния какого-либо тела.

Опытным путем было установлено, что, например, кислород и азот при нормальных условиях подчиняются соотношению  $\frac{pV}{T} = \text{const}$ .

Согласно **закону Авогадро**, при нормальных условиях 1 моль любого газа занимает одинаковый объем 22.4 л, следовательно, для 1 моля идеального газа можно написать:  $pV_m = RT$ , где  $R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \cdot 22.4 \cdot 10^{-3}}{273.15} =$

$8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – **универсальная газовая постоянная**. Т.к.  $V = \frac{m}{\mu}V_m$ , где  $\mu$  – молярная масса вещества, то

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

$pV = \frac{m}{\mu}N_A \frac{R}{N_A} T = \frac{m}{\mu}N_A kT$ , где  $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – **постоянная Больцмана**. Следовательно,  $pV = NkT$ . Отсюда получим уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$p = nkT.$$

## 18 Статистика идеального газа

### Распределение молекул газа по скоростям. Распределение Максвелла

В результате столкновений молекул друг с другом их скорости случайным образом изменяются. Т.к. число столкновений в единицу времени огромно, устанавливается стационарное распределение молекул по скоростям, с точностью до флуктуаций постоянное в данном интервале скоростей.

Впервые распределение молекул по скоростям было установлено Дж.К. Максвеллом. Найдем скорость центра масс двух молекул:  $\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ . Т.к. молекулы быстро «теряют память» о предыдущих столкновениях,  $v_c$  и относительные скорости молекул не скоррелированы, то  $\langle \vec{v}_c(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\left\langle \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \right\rangle = \frac{(m_1 - m_2)\langle \vec{v}_1\vec{v}_2 \rangle + m_1\langle v_1^2 \rangle - m_2\langle v_2^2 \rangle}{m_1 + m_2} = 0.$$

Т.к. скорости  $v_1$  и  $v_2$  не скоррелированы, то  $\langle \vec{v}_1\vec{v}_2 \rangle = 0$ ,  $\Rightarrow \frac{m_1\langle v_1^2 \rangle}{2} = \frac{m_2\langle v_2^2 \rangle}{2}$ . Следовательно, система молекул, обладающих возможностью обмениваться энергией, приходит к такому состоянию, в котором средние кинетические энергии молекул разных сортов и средние кинетические энергии молекул в разных пространственных частях системы имеют одинаковые значения (термодинамическое равновесие). Среднюю кинетическую энергию молекул в состоянии термодинамического равновесия обычно характеризуют **температурой**:  $\langle mv^2/2 \rangle = 3kT/2$ .

Рассмотрим теперь движение молекулы, у которой  $v_0 = 0$ . Пусть при  $i$ -м столкновении проекции скоростей меняются на  $\Delta v_{\aleph i}$ ,  $\aleph = \overline{x, y, z}$ . Через некоторое время  $v_{\aleph} = \sum \Delta v_{\aleph i}$ . Т.к. каждая из проекций скорости является суммой большого числа случайных величин, удовлетворяющих нормальному распределению, то  $\varphi(v_{\aleph}^2) = A \exp(-\alpha v_{\aleph}^2)$ , где  $A$  и  $\alpha$  одинаковы для всех проекций ввиду эквивалентности осей координат.

Вероятность того, что  $v_{\mathbb{N}} \in (v_{\mathbb{N}}, v_{\mathbb{N}} + dv_{\mathbb{N}})$  равна  $dP(v_{\mathbb{N}}) = \varphi(v_{\mathbb{N}}^2)dv_{\mathbb{N}}$ . Т.к. вероятность того, что скорость  $\vec{v}$  молекулы находится в кубе с направляющей диагональю  $d\vec{v}$  равна произведению  $\prod dP(v_{\mathbb{N}})$ , получим:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = A^3 \exp(-\alpha v^2) dv_x dv_y dv_z,$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Вероятность  $P$  должна отвечать условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP = 1, \text{ а т.к. } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\pi/\alpha}, \text{ получим: } A = \sqrt{\alpha/\pi}.$$

Найдем среднюю кинетическую энергию молекул:

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv_x dv_y dv_z.$$

Этот интеграл посчитаем посредством дифференцирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\mathbb{N}}^2 e^{-\alpha v_{\mathbb{N}}^2} dv_{\mathbb{N}} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_{\mathbb{N}}^2} dv_{\mathbb{N}} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} \sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \cdot 3 \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} \sqrt{\pi} = \frac{3m}{4\alpha}.$$

А т.к.  $\langle mv^2/2 \rangle = 3kT/2$ , то  $\alpha = m/(2kT) \Rightarrow$

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z.$$

Перейдем к вероятности  $dP(v)$ , учитывая, что распределение скоростей изотропно.  $dv_x dv_y dv_z = dV$ , где  $dV$  – объем сферического слоя:  $dV = 4\pi v^2 dv$ .

Получим **распределение Максвелла**:

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2.$$

## Характерные скорости. Распределение скорости по компонентам

Распределение скорости по компонентам имеет вид:

$$f(v_{\text{в}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv_{\text{г}} dv_{\text{д}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_{\text{в}}^2}{2kt}\right).$$

**Характерные скорости** распределения Максвелла:

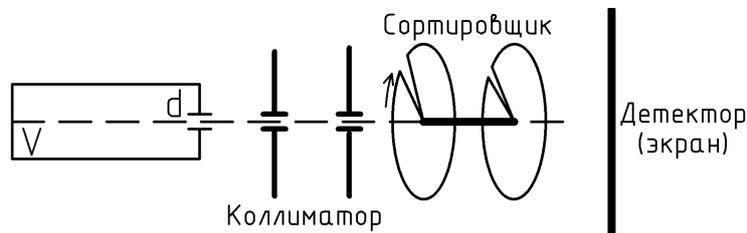
$$\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kt}{\pi m}}, \quad \langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v) dv = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

Кроме того, вводится понятие **наивероятнейшей скорости**  $v_B$ : это такая скорость, при которой  $f(v)$  имеет максимум, т.е.  $\frac{df}{dv} = 0$ ,  $\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ .

Таким образом, все характерные скорости распределения пропорциональны  $T^{1/2}$ , отличаясь лишь постоянными множителями.

## Экспериментальная проверка распределения Максвелла

Экспериментальная проверка распределения Максвелла проводилась различными учеными, но общая суть метода сводится к сортировке большого количества молекул по скоростям и подсчету долей молекул, приходящихся на разные участки скоростей.



Метод Ламперта

**Метод Ламперта** заключается в следующем. Из сосуда  $V$  с газом молекулы попадают в вакуумную камеру. Чтобы обеспечить «бесстолкновительный» полет, размер щели  $d$  много меньше длины свободного пробега молекул.

кул (сотые доли мм). Коллиматор — два экрана с соосными щелями — отсеивает лишь молекулы, летящие в горизонтальном направлении. Сортировщик — вращающиеся синхронно диски с узкими прорезями, сдвинутыми на угол  $\Delta\varphi$  и расположенные на расстоянии  $l$  друг от друга — отсеивает молекулы со строго определенными скоростями. Считаем щели в дисках бесконечно узкими, сквозь них пройдут молекулы со скоростями  $v = l\omega/(\Delta\varphi + 2\pi n)$ ,  $n = \overline{1, 2, \dots}$ ,  $\omega$  — угловая частота вращения дисков. В опыте использовались молекулы серебра, оседающие на экран.

Другие эксперименты отличались от метода Ламперта лишь устройством сортировщиков: им может быть вращающийся цилиндр с узкой щелью, параллельной оси (молекулы оседают внутри цилиндра), либо же гравитационное поле Земли (молекулы после коллиматора сразу оседают на экране). Все эксперименты подтвердили теорию Максвелла распределения молекул газа по скоростям.

## Распределение Больцмана. Барометрическая формула

Во внешнем потенциальном поле полная энергия молекулы равна  $E = mv^2/2 + U$ . В условиях термодинамического равновесия потенциальная сила  $F = -\text{grad } U$  уравновешивается силами давления.

Рассмотрим баланс сил вдоль оси  $X$ :

проекция потенциальной силы  $dF_{1x} = -n_0 \frac{\partial U}{\partial x} dx dy dz$ ;

проекция сил давления:  $dF_{2x} = dp dy dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$ .

При равновесии  $dF_{1x} + dF_{2x} = 0$ , следовательно,  $\frac{\partial p}{\partial x} = -n_0 \frac{\partial U}{\partial x}$ . Эти равенства справедливы и для других осей координат. Следовательно,

$$\sum_{\aleph=x,y,z} \frac{\partial p}{\partial \aleph} d\aleph = -n_0 \sum_{\aleph=x,y,z} \frac{\partial U}{\partial \aleph}, \quad p = -n_0 dU = kT dn_0 \quad (\text{т.к. } p = n_0 kT), \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dn_0}{n_0} = -\frac{dU}{kT}, \quad \Rightarrow \quad \int_{n_0}^n \frac{dn_0}{n_0} = -\int_{U_1}^{U_2} \frac{dU}{kT}.$$

Тогда, если нормировать  $U$  на 0 в начале координат, получим **распределение Больцмана**:

$$n_0(x, y, z) = n_0(x_0, y_0, z_0) \exp\left(-\frac{U}{kT}\right).$$

Распределение Больцмана применимо для любого потенциального поля. В случае силы тяжести  $U = m_0gh$  (на малых высотах), тогда **парциальное давление**  $i$ -й компоненты воздуха для изотермической атмосферы выражается формулой

$$p_i = p_{0i} \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right) = p_{0i} \exp\left(-\frac{\rho_0gh}{kT}\right).$$

Однако, атмосфера далеко не изотермическая, поэтому при нормальных условиях на высоте  $h = 0$  м вводят следующее приближение **барометрической формулы** (справедливо для высот до 11 км):

$$p(h) = 1.013 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{6.5h}{2.88 \cdot 10^5}\right)^{5.255},$$

все величины – в единицах СИ.

## Распределение Максвелла–Больцмана

**Распределение Максвелла–Больцмана** представляет собой распределение молекул по скоростям и координатам в потенциальном поле, когда полная энергия молекулы  $E = mv^2/2 + U$ .

Объединив распределения Максвелла и Больцмана в одно, получим количество молекул, расположенных в кубе с координатами  $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N} + d\mathfrak{N})$ ,  $\mathfrak{N} = \overline{x, y, z}$  и двигающихся со скоростями, лежащими в пределе  $(v_{\mathfrak{N}}, v_{\mathfrak{N}} + dv_{\mathfrak{N}})$ :

$$dN_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

## 19 Теория флуктуаций

### Флуктуации основных термодинамических величин.

#### Флуктуации плотности идеального газа

Число частиц в малом объеме  $V_1$  сосуда не является постоянным. Среднее число частиц  $\langle m \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T m(t) dt$ . Можно воспользоваться **эргодической гипотезой**: *среднее по времени равно среднему по статистическому ансамблю*. Тогда

$$\begin{aligned} \langle m \rangle_t &= \langle m \rangle_a \sum_{m=0}^n m P(V_1, m) = \sum_{m=0}^n \frac{n! m}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^n = pn(p+q)^{n-1} = pn. \end{aligned}$$

Т.о., средняя плотность частиц в  $V_1$  равна средней плотности во всем объеме  $V$ .

Говорят, что величина **флуктурует**, если ее значение колеблется около среднего. Мерой флуктуации является среднее квадратичное (стандартное) отклонение  $\sigma = \sqrt{\langle (\Delta m)^2 \rangle} = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}$ .

$$\begin{aligned} \langle m^2 \rangle &= \sum_{m=0}^n \frac{n! m^2}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = p \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \right] = \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^n \right] = p [n(p+q)^{n-1} + pn(n-1)(p+q)^{n-2}] = npq + n^2 p^2, \end{aligned}$$

Следовательно,  $\sigma = \sqrt{npq}$ .

**Относительная флуктуация:**

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta m)^2 \rangle}}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{npq}}{np} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Следовательно, относительная флуктуация уменьшается с ростом количества частиц. Таким образом, относительные флуктуации основных термодинами-

ческих величин тем меньше, чем большее число молекул газа в сосуде:

$$\delta_\rho \propto N^{-1/2}; \delta_p \propto N^{-1/2}; \delta_T \propto N^{-1/2}.$$

При  $N = N_A$  эти флуктуации имеют величину порядка  $10^{-14}$ .

Если имеется система  $N$  независимых частиц, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния системы пропорциональна  $N^{-1/2}$ .

## Молекулярное рассеяние света. Формула Рэлея. Диаграмма направленности рассеяния

**Рассеяние света** — явление преобразования света веществом, сопровождающееся изменением направления распространения света и проявляющееся как несобственное свечение вещества.

**Молекулярное рассеяние** света в чистых средах обусловлено неоднородностями, связанными с флуктуациями плотности среды и ее анизотропии. Интенсивность молекулярного рассеяния растет при увеличении температуры.

Система рассеивающих молекул эквивалентна системе диполей, колеблющихся с частотой падающего света  $\nu$ , тогда интенсивность рассеянного света в направлении, перпендикулярном падающему свету,  $I \propto \nu^4$  (**закон Рэлея**).

Интенсивность рассеянного света зависит и от направления. В случае рассеяния естественного света, угловая **диаграмма направленности** рассеяния имеет вид:

$$I(\theta) = I(\pi/2)(1 + \cos^2 \theta).$$

Свет, рассеянный перпендикулярно падающему, полностью линейно поляризован, направление вектора  $\vec{E}$  у него перпендикулярно плоскости, образованной падающим и рассеянным лучами. Остальное излучение поляризовано частично, причем степень поляризации тем меньше, чем больше угол отличается от  $\pi/2$ .

## Спонтанное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна. Комбинированное рассеяние

**Комбинированное рассеяние** — возникновение в спектре рассеянного света смещенных частот: **стоксовой**  $\nu_C = \nu_0 - \nu$  и **антистоксовой**  $\nu_A = \nu_0 + \nu$ , дающих **комбинированный спектр** молекулы. Интенсивность антистоксовой компоненты меньше интенсивности стоксовой и растет с ростом температуры среды, интенсивность стоксовой компоненты от температуры не зависит.

$\nu_C$  возникает при переходе молекулы на более высокий колебательный энергетический уровень, поэтому,  $h\nu = \Delta W$  — разность между уровнями.  $\nu_A$  возникает при обратном переходе молекулы. Т.к. число молекул в возбужденном состоянии меньше числа в нормальном, интенсивность антистоксовой компоненты значительно ниже, чем стоксовой.

**Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна** представляет собой рассеяние света на флуктуациях плотности среды (дискретное изменение частоты света в твердых телах и жидкостях при взаимодействии волны с упругими колебаниями среды). Этот вид рассеяния приводит к возникновению новых спектральных линий, симметричных относительно исходной, и отличающихся от нее на величину, равную частоте флуктуаций среды.

## 20 Брауновское движение

**Длина свободного пробега. Частота соударений молекул**

**Средняя длина свободного пробега** — среднее расстояние  $\lambda$ , проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами.

Будем считать вначале, что движется только выбранная молекула, а все остальные являются неподвижными. Молекула сталкивается с другой, если их центры лежат на расстоянии  $r < d$ , где  $d$  — диаметр молекулы. Т.о., движение молекулы можно представить как движение внутри цилиндра радиуса

$r = d$  от первого до второго соударения.

В единицу времени молекула проходит путь  $\langle v \rangle$ , следовательно, число соударений за это время равно числу молекул, центры которых находятся внутри коленчатого цилиндра радиуса  $r = d$  и длины  $\langle v \rangle$ .

Пренебрежем изломами цилиндра, тогда число соударений за единицу времени составит  $\nu' = \pi d^2 \langle v \rangle n$ , где  $n$  – концентрация молекул. Но т.к. молекулы движутся, средняя скорость определяется средней относительной скоростью  $\langle v_{rel} \rangle$ ,  $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ,  $v_{rel}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2$ . Отсюда  $\langle v_{rel}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2\langle v_1 v_2 \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rangle$ .

Так как усреднение проводится по всем молекулам, третье слагаемое в предыдущей формуле равно нулю (скорости отдельных молекул не коррелируют между собой),  $\langle v_2^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ . Отсюда  $\langle v_{rel}^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle$ , а т.к.  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \propto \langle v \rangle$ , можно записать:  $\langle v_{rel} \rangle = \sqrt{2}\langle v \rangle$ . Таким образом,

$$\nu = \sqrt{2}\pi d^2 \langle v \rangle n, \quad \lambda = \frac{\langle v \rangle}{\nu} = \left( \sqrt{2}\pi d^2 n \right)^{-1}.$$

Можно выразить  $\lambda$  через **эфффективное сечение**  $\sigma$ :  $\lambda = (\sqrt{2}\sigma n)^{-1}$ ,  $p = nkT \Rightarrow$  при  $T = \text{const}$ ,  $\lambda \propto p^{-1}$ . Если известны  $\langle v \rangle$  и  $\lambda$ , то  $\nu = \langle v \rangle / \lambda$ .

## Теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы

**Степень свободы** (СС) — число независимых переменных, полностью определяющих состояние системы.

**Теорема о равномерном распределении кинетической энергии по СС:** в условиях статистического равновесия на любую СС системы приходится одинаковая средняя  $E_k = kT/2$ . Т.о.,  $\langle mv^2/2 \rangle = kT/2$ .

Докажем эту теорему. Рассмотрим фазовое среднее по каноническому ансамблю от величины  $x_k \frac{\partial E}{\partial x_l}$ , где  $x_k$  – координаты фазовой точки в ФП. Согласно каноническому распределению Гиббса,

$$\langle x_k \frac{\partial E}{\partial x_l} \rangle = \int_{(X)} x_k \frac{\partial E}{\partial x_l} \exp\left(\frac{\Psi - E}{\theta}\right) dX = -\theta \int_{(X)} x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) dX,$$

$$\int_{(x_l)} x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) dx_l =$$

$$= x_k \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) \Big|_{x_l=-\infty}^{x_l=\infty} - \int_{(x_l)} \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dx_l.$$

Т.к. при  $x \rightarrow \pm\infty$   $E \rightarrow \infty$ , то первое слагаемое в правой части предыдущей формулы равно нулю. Т.к.  $x_l$  и  $x_k$  — независимы, то  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl} \Rightarrow$

$$\int_{(x_l)} \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dx_l = \delta_{kl} \exp\left(-\frac{\Psi - E}{\theta}\right) dx_l \Rightarrow \langle x_k \frac{\partial E}{\partial x_l} \rangle = \theta \delta_{kl}.$$

Таким образом,  $\langle p_k \frac{\partial E}{\partial p_k} \rangle = \theta$ .  $E = U + \sum \frac{p_k^2}{2m}$ ,  $\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m}$ ,

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} p_k \frac{\partial E}{\partial p_k}.$$

Окончательно получим:  $\langle E_k \rangle = \frac{\theta}{2} \equiv \frac{kT}{2}$ . Ч.Т.Д.

## Характер движения брауновской частицы

**Брауновское движение** — движение мелких частиц, взвешенных в жидкости или газе, возникающее за счет взаимодействия с молекулами среды.

В соответствии с теоремой о распределении  $E_k$ , на каждую СС брауновской частицы приходится по  $kT/2$  энергии, что приводит к движению ее ЦМ.

Брауновское движение проявляется как в поступательном, так и во вращательном движении. Обуславливается флуктуациями давления в среде.

## Поступательное брауновское движение

Вычислим средний квадрат удаления частицы от начала координат за  $n$  шагов:

$$\langle r_n^2 \rangle = \langle \sum q_i q_j \rangle = \sum \langle q_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle q_i q_j \rangle = \sum \langle q_i^2 \rangle.$$

$\langle q_i^2 \rangle$  одинаковы для всех шагов,  $\langle q_i^2 \rangle = a^2 \Rightarrow$

$$\langle r_n^2 \rangle = a^2 n = \frac{a^2}{\Delta t} t = \alpha t = \langle r_t^2 \rangle,$$

где  $\Delta t$  – промежуток времени между двумя наблюдениями.

Пусть  $b$  – коэффициент трения частицы в жидкости вследствие вязкости (вычисляется по формуле Стокса). Тогда  $m\ddot{x} = -b\dot{x} + F_x$ , где  $F_x$  – случайная сила. Член  $-b\dot{x}$  возникает вследствие ударов молекул. Однако, при движении молекулы, ударяющие «в лоб», передают больший импульс. Преобразуем уравнение движения частицы:

$$x\ddot{x} = \left( \frac{\dot{x}^2}{2} \right) - \dot{x}^2, \quad x\dot{x} = \left( \frac{\dot{x}^2}{2} \right), \Rightarrow \frac{m}{2}\ddot{x}^2 - m\dot{x}^2 = -\frac{b}{2}\dot{x}^2 + xF_x.$$

Усредним это уравнение по ансамблю брауновских частиц, учитывая, что  $\langle \frac{dX}{dt} \rangle = \frac{d\langle X \rangle}{dt}$  (так как усреднение по ансамблю переставимо с дифференцированием):

$$\frac{m}{2}\langle \ddot{x}^2 \rangle - \langle m\dot{x}^2 \rangle = \frac{b}{2}\langle \dot{x}^2 \rangle + \langle F_x x \rangle.$$

Т.к. отклонения брауновских частиц в любом направлении равновероятны, то  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / 3$ ,  $\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \alpha t / 3$ ,  $\langle \dot{x}^2 \rangle = \alpha / 3$ ,  $\langle \ddot{x}^2 \rangle = 0$ . Из-за случайного характера  $F_x$ , она не коррелирует с  $x$ , следовательно,  $\langle m\dot{x}^2 \rangle = \alpha b / 6$ . По теореме о распределении  $E_k$ ,  $\langle m\dot{x}^2 \rangle = kt \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{6kT}{b}, \quad \boxed{\langle r^2 \rangle = \frac{6kTt}{b}}.$$

Пусть  $D = 3kT/b$  – коэффициент диффузии брауновской частицы, тогда получим формулу Эйнштейна:

$$\langle r^2 \rangle = 2Dt.$$

Для шара  $b = 6\pi\mu r_0 \Rightarrow \langle r^2 \rangle = \frac{kT}{\pi\mu r_0} t$ .

## Вращательное брауновское движение

Его проще исследовать при помощи небольшого зеркала, подвешенного на упругой нити. Вследствие взаимодействия с молекулами воздуха на каждую СС зеркала приходится  $kT/2$  энергии. Следовательно, зеркало будет испытывать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, которые можно наблюдать при помощи отраженного зеркалом луча света.

Пусть  $D$  – модуль кручения нити,  $I$  – момент инерции зеркала. Тогда  $I\ddot{\varphi} = -D\varphi$ ,  $I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -D\varphi\dot{\varphi}$ . Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}D\varphi^2 = \text{const.}$$

Малые крутильные колебания являются гармоническими. По теореме о распределении  $E_k$ , получим:  $\frac{1}{2}I\langle\dot{\varphi}^2\rangle = \frac{1}{2}D\langle\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}kT$ . Тогда

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{kT}{D}.$$

## Опыты Перрена по определению числа Авогадро

Брауновскими частицами Перрен выбрал шарики из гуммигута (млечный сок деревьев). Эмульсия рассматривалась в микроскоп. Из распределения Больцмана следует, что  $n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{p'h}{kT}\right)$ , где  $p' = (\rho - \rho')Vg$ ,  $V$  – объем шарика,  $\rho$  – плотность гуммигута,  $\rho'$  – плотность жидкости.

Число видимых на высоте  $h$  шариков  $\Delta N = n(h)S\Delta h$ , где  $\Delta h$  – глубина зрения микроскопа.  $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{n(h_1)}{n(h_2)} = \frac{\exp\left(-\frac{p'h_1}{kT}\right)}{\exp\left(-\frac{p'h_2}{kT}\right)} = \exp\left(\frac{p'}{kT}(h_2 - h_1)\right).$$

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{p'(h_2 - h_1)}{kT}, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{p'(h_2 - h_1)}{T \ln(\Delta N_1/\Delta N_2)}.$$

Зная  $p'$  и  $T$  и подсчитав  $\Delta N$  для разных высот, можно найти постоянную Больцмана  $k$ . Постоянную Авогадро получим, разделив газовую постоянную  $R$  на  $k$ :  $N_A = R/k$ . Газовая постоянная была хорошо известна из других экспериментов. У Перрена получилось  $N_A = (6.5 \div 7.2) \cdot 10^{23}$  (современное значение —  $6.022 \cdot 10^{23}$ ).

## Стохастические (случайные) дифференциальные уравнения

### Уравнение Ланжевена

Рассмотрим однородную систему во внешнем потенциале  $U(\vec{r}) \equiv 0$  и рассчитаем в ней движение брауновской частицы в направлении  $OX$ . Выделим из случайной силы  $F$ , действующей на частицу, часть  $f$ , существующую при отсутствии флуктуаций воздействия среды на частицу (сила вязкого трения):

$$f = -bv = -\Gamma p, \quad \text{где } \Gamma = \frac{b}{m}.$$

Тогда получим уравнение движения брауновской частицы (**уравнение Ланжевена**):

$$\dot{p} + \Gamma p = F(t) = F - f, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \langle F(t) \rangle = 0.$$

Решение стохастического уравнения Ланжевена:

$$p = p_0 e^{-\Gamma t} + \int_0^t \exp[-\Gamma(t - t_1)] F(t_1) dt_1, \quad \langle p \rangle = p_0 e^{-\Gamma t}.$$

### Уравнение Смолуховского

Рассмотрим для простоты одномерный случай и введем функцию распределения  $\rho(t_0, x_0 | t, x)$ , такую, что  $\rho dx$  — вероятность обнаружить брауновскую частицу в интервале  $(x, x + dx)$  в момент времени  $t$ .

Характерное специальное свойство брауновских частиц — **безынерционность**: любое промежуточное состояние частицы можно взять за начальное

и от этого описание дальнейшего хода процесса не изменится. Это означает, что функция  $\rho$  не зависит от того, каким образом частица попала в точку  $x_0$  к моменту времени  $t_0$ . Также она не включает информацию о том, каким способом и через какие промежуточные положения брауновская частица перешла в точку  $x$ . Процессы, описываемые такими формулами, называют **марковскими**.

Рассмотрим два последовательных интервала времени:  $(t_0, t)$  и  $(t, t + \Delta t)$  и составим произведение

$$\rho(t_0, x_0|t, x)\rho(t, x'|t + \Delta t, x)dx dx', \quad t_0 < t < t + \Delta t.$$

Это — вероятность обнаружить частицу в интервале  $(x, x + dx)$  в момент времени  $t + \Delta t$ , если в момент  $t_0$  она была в точке  $x_0$ , а в момент  $t$  — в интервале  $(x', x' + dx')$ .

Проинтегрировав по всем возможным состояниям  $x'$ , получим **уравнение Смолуховского**:

$$\rho(t_0, x_0|t + \Delta t, x) = \int \rho(t_0, x_0|t, x')\rho(t, x'|t + \Delta t, x)dx'.$$

В простейших случаях никакой момент времени не выделен, следовательно, зависимость  $\rho$  от времени однородна:

$$\rho(t_0, x_0|t, x) = \rho(0, x_0|t - t_0, x) = \rho(x_0|t - t_0, x).$$

Уравнение для однородного во времени марковского процесса:

$$\rho(x_0|t + \Delta t, x) = \int \rho(x_0|t, x')\rho(x'|\Delta t, x)dx', \quad 0 < t < t + \Delta t.$$

Уравнение Смолуховского — нелинейное уравнение, т.е. для него не выполняется теорема единственности решения. Оно может иметь решения, не несущие физического смысла.

## 21 Термодинамический подход к описанию молекулярных явлений

**Термодинамическая система. Термодинамические параметры.**

**Система** — совокупность физических объектов исследования, заключенных в конечной области пространства. **Граница системы** может быть как материальной, так и воображаемой. Система характеризуется не только границами, но и свойствами вещества, входящего в нее.

**Идеальный газ** — совокупность точечных частиц конечной массы, столкновение между которыми происходит по закону абсолютно упругого удара шаров, причем другие способы взаимодействия частиц отсутствуют.

**Макроскопическое состояние системы** определяется **макроскопическими термодинамическими параметрами**: давлением  $p$ , температурой  $T$  и объемом  $V$ . **Внутренние параметры** определяются физическими объектами системы, **внешние** — объектами, не входящими в ее состав. **Микроскопическое состояние** характеризуется  $6N$  числами ( $N$  — количество частиц):  $3N$  координатами и  $3N$  проекциями скоростей, которые следует рассматривать как случайные величины.

**Стационарное состояние** системы наблюдается, когда параметры системы не меняются с течением времени. **Равновесное состояние** — такое стационарное состояние, когда отсутствуют стационарные потоки энергии или вещества за счет действия внешних источников.

**Термодинамическая система** — макроскопическая система, находящаяся в состоянии ТД равновесия и характеризующаяся ТД параметрами.

ТД параметры делятся на **интенсивные**, не зависящие от массы или количества частиц, например, давление и температура, и **экстенсивные** (аддитивные), зависящие от этих характеристик, например, внутренняя энергия, энтропия.

## Уравнение состояния. Нулевое начало термодинамики

**Уравнение состояния** системы — соотношение, определяющее связь между параметрами состояния данной системы.

ТД систему можно задать с помощью уравнения состояния  $F(p, V, T) = 0$ . В общем случае уравнение состояния имеет вид:  $F(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, T) = 0$ , где  $a_i$  — внешние параметры,  $b_i$  — внутренние параметры.

Если внутренним параметром является энергия  $U$ , то  $U = U(a_1, \dots, a_n, T)$  — **уравнение энергии** (калорическое уравнение состояния). Если  $b_k \equiv A_k$  — сопряженная  $a_k$  обобщенная сила, то  $A_i = A_i(a_1, \dots, a_n, T)$  — **термическое уравнение состояния**. *Общее число термических и калорических уравнений состояния равно числу СС системы.* Для простой системы они имеют вид:  $A = A(a, T)$ ,  $U = U(a, T)$ .

Для идеального газа термическим уравнением состояния является уравнение Менделеева–Клапейрона, полученное Клапейроном из законов Бойля–Мариотта и Гей–Люссака в виде  $pV = CT$ , на основе закона Авогадро Менделеев уточнил:  $pV = \frac{m}{\mu}RT$ .

**Нулевой постулат ТД:** *во всяком теле во всех точках этого тела существует определенная температура, и тепло движется от точек с большей температурой к точкам с меньшей.* **Температура** — равновесный ТД параметр, т.к. существует только у ТД равновесных систем, притом у таких, части которых не взаимодействуют друг с другом.

Система, не обменивающаяся с внешними телами ни энергией, ни веществом, называется **изолированной**.

**Первый постулат ТД:** *изолированная макроскопическая система с течением времени приходит в состояние ТД равновесия и никогда самопроизвольно из него выйти не может (общее начало ТД).*

ТД равновесие является **транзитивным** (если имеются три равновесные системы  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и если  $A$  и  $B$  находятся в равновесии с  $C$ , то  $A$  и  $B$  находятся в равновесии и между собой).

**Второй постулат ТД:** *все равновесные параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры.* Т.к. энергия системы —

внутренний параметр, то она тоже зависит от внешних параметров и температуры. Следовательно, при ТД равновесии внутренние параметры системы являются функциями внешних параметров и энергии.

Равновесные системы, у которых внутренние параметры — функции внешних и энергии называются **эргодическими**.

### **Принцип ТД аддитивности. Квазистатические процессы. Обратимость процессов**

Принцип ТД аддитивности заключается в аддитивных свойствах экстенсивных параметров системы, т.е. для системы, состоящей из отдельных частей. Любой экстенсивный параметр равен сумме тех же экстенсивных параметров всех частей системы.

Если система выведена из состояния ТД равновесия, то, согласно 1-му началу ТД, через некоторое время она придет в равновесное состояние. Такой процесс называется **релаксацией**, а время — **временем релаксации**  $\tau$ .

**Равновесный** (квазистационарный) процесс — такой, в котором все параметры системы изменяются физически бесконечно медленно, так что система все время находится в равновесных состояниях. **Физически бесконечно медленным** изменением называют такое изменение параметра  $a$ , когда скорость  $\frac{da}{dt}$  значительно медленнее изменения этого параметра при релаксации:  $\frac{da}{dt} \ll \frac{\Delta a}{\tau}$ . В противном случае процесс называется **неравновесным** (нестационарным). В этом случае конечное состояние системы зависит не только от начальных и конечных значений внешних параметров и начальных значений внутренних параметров, но и от способа осуществления процесса.

**Обратимым** называется процесс, для которого возможен обратный переход из конечного состояния в начальное через те же промежуточные состояния, что и в прямом переходе, иначе процесс называется **необратимым**. Очевидно, что *неравновесный процесс всегда необратим*. Равновесный же процесс всегда является обратимым. Бесконечно медленный процесс не обязательно является равновесным и обратимым. Равновесное состояние осуществляется посредством флуктуаций через неравновесные состояния. Ес-

ли состояние системы отличается от равновесного меньше, чем на величину флуктуаций, то его следует рассматривать как равновесное.

## 22 Теплоемкость системы

### Теплоемкость идеального газа. Ее связь со степенями свободы

**Теплоемкостью** вещества называется количество энергии, которое необходимо ему передать, чтобы увеличить температуру на один Кельвин:  $C = \frac{\delta Q}{dT}$ . Соответственно, **удельная** теплоемкость,  $c$  — энергия для нагрева единицы массы вещества, **молярная** теплоемкость,  $C$  — энергия для нагрева одного моля вещества.

Согласно первому началу ТД,

$$\delta Q = dU + p dV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV,$$

т.к. давление и внутренняя энергия подчиняются уравнениям состояния  $p = p(V, T)$  и  $U = U(V, T)$ . Следовательно,

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \frac{dV}{dT}.$$

Можно выделить теплоемкости, соответствующие различным изопроцессам в газе:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V; \quad C_P = C_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

В случае идеального газа *внутренняя энергия не зависит от объема (закон Джоуля)*, т.к. отсутствует взаимодействие между молекулами, и их энергия определяется согласно теореме о распределении энергии по СС (на каждую СС частиц газа приходится по  $kT/2$  кинетической энергии). Следовательно,  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \equiv 0$ .

Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона для одного моля газа,  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{p}$ ,  $\Rightarrow$  получим **уравнение Майера**:

$$\boxed{C_P = C_V + R}, \quad c_P = c_V + R_0, \quad \text{где } R_0 = R/\mu, \quad c = C/\mu.$$

В одной молекуле идеального газа содержится  $N_A$  молекул, следовательно,  $U = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT$ , где  $i$  – число СС молекулы идеального газа,  $\Rightarrow$

$$C_P = \frac{i}{2}R, \quad C_V = \frac{i+2}{2}R.$$

В действительности же теплоемкость молекул зависит от температуры. Это объясняется тем, что в определенных интервалах температур наступает переход молекул от одного вида движения к другому, что приводит к росту СС.

При малой температуре молекула ведет себя как материальная точка, т.е.  $i = 3$ , затем она приходит во вращение ( $i = 4$ ), затем – колебание ( $i = 5$ ).

## Политропный процесс. Уравнение политропы и его частные случаи

Вначале рассмотрим **адиабатический процесс**, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой:  $C_V dT + p dV = 0$ ,  $T = pV/R = pV/(C_P - C_V)$ . Разделив обе части на  $C_V T$ , получим:

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} - \text{показатель адиабаты}, \quad \Rightarrow$$

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \boxed{TV^{\gamma-1} = \text{const}},$$

$$\boxed{pV^\gamma = \text{const}}, \quad \boxed{T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}}.$$

Все изопроцессы протекают при постоянной теплоемкости, т.е. они являются частными случаями **политропного процесса**.

$$\delta Q = C dT, \quad \Rightarrow \quad C dT = C_V dT + p dV, \quad \frac{dT}{T} - \frac{p}{C - C_V} \cdot \frac{dV}{T} = 0, \quad p = (C_P - C_V) \frac{T}{V},$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = 0, \Rightarrow \boxed{TV^{n-1} = \text{const}} \text{ — уравнение политропы.}$$

$$\boxed{pV^n = \text{const}}, \quad \boxed{n = \frac{C - C_P}{C - C_V}} \text{ — показатель политропы.}$$

Частные случаи политропного процесса:

$C = 0, n \equiv \gamma$  — адиабатический процесс,

$C = \infty, n = 1$  — изотермический процесс,

$C = C_P, n = 0$  — изобарный процесс,

$C_V, n = \pm\infty$  — изохорный процесс.

## Классическая теория теплоемкости ТТ. Закон Дюлонга и Пти

Моделью классического ТТ является кристаллическое тело (упорядоченная структура), атомы которого колеблются около положения равновесия в узлах решетки. Любой атом колеблется в трех перпендикулярных направлениях. На каждую степень свободы приходится  $kT/2$  энергии, отсюда  $U = 3NkT$  (3 СС на кинетическую и 3 на потенциальную энергию). Тогда  $c_V = 3Nk$ , молярная теплоемкость,  $C_V = 3R$  — **закон Дюлонга и Пти**.

Но! При приближении температуры к абсолютному нулю теплоемкость стремится к нулю по степенному закону  $C_V \propto T^3$ , причем у металлов при очень низких температурах зависимость еще сильнее (за счет вклада электронного газа).

Трудность классической теории теплоемкости ТТ удалось преодолеть квантовой теории ТТ.

## Квантовая теория теплоемкости ТТ. Закон Дебая

Для получения точного значения  $C$  Эйнштейн использовал формулу энергии гармонического осциллятора  $\varepsilon = (n + 1/2)\hbar\omega$ ,  $\Rightarrow$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Он отождествил кристаллическую решетку из  $N$  атомов с системой  $3N$  гармонических осцилляторов с одинаковой собственной частотой  $\omega$ . Существование нулевой энергии  $1/2\hbar\omega$  было установлено значительно позже, поэтому Эйнштейн исходил из планковского  $\varepsilon = n\hbar\omega$ :

$$U = 3N\langle\varepsilon\rangle = 3N\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \Rightarrow C = \frac{3N\hbar\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)^2} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

В случае  $kT \gg \hbar\omega$ ,  $c = 3Nk$ , как и у Дюлонга и Пти, однако, при падении температуры, когда  $kT \ll \hbar\omega$ ,  $c \propto \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) T^{-2}$  — не по закону  $T^3$ .

Количественного согласия с экспериментом удалось добиться Дебаю. Он учел, что колебания атомов не являются независимыми. Т.о., кристалл — система  $N$  упруго связанных друг с другом осцилляторов с  $3N$  СС. Эти колебания порождают стоячие волны, возникающие лишь при условии  $l_i = \lambda_i n_i / 2$  ( $l_i$  — длина соответствующего направления в кристалле). Число колебаний на единицу объема кристалла в интервале  $\omega, \omega + d\omega$  равно  $dN_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}$ . Но необходимо еще учесть, что в ТТ вдоль некоторого направления могут распространяться 3 волны с одной и той же частотой, но разной поляризацией: одна продольная и две поперечные. Следовательно,

$$dN_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2} \left( \frac{1}{v_{\parallel}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right).$$

Положим  $v_{\parallel} = v_{\perp} = v$ . Тогда  $dN_\omega = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}$ . Зная, что всего в теле может быть  $3N$  волн, найдем максимальную частоту колебаний:  $\omega_{max} = v\sqrt[3]{6\pi^2 N}$ . Соответственно,  $\lambda_{min} = \frac{2\pi v}{\omega_{max}} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d$ , где  $d$  — расстояние между атомами. Окончательно получим:

$$\boxed{dN_\omega = 9N \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{max}^3}}, \quad U = \int \langle\varepsilon\rangle dN_\omega, \quad U_0 = \frac{3}{2} N \hbar \omega_{max}.$$

$$U = \frac{9N}{\omega_{max}^3} \int_0^{\omega_{max}} \left( \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} \right) \omega^2 d\omega = U_0 + \frac{9N\hbar}{\omega_{max}^3} \int_0^{\omega_{max}} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

$$C = \frac{9N\hbar}{\omega_{max}^3} \int_0^{\omega_{max}} \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \hbar\omega^4 d\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)^2 kT^2}.$$

**Характеристическая температура Дебая**  $kT_D = \hbar\omega_{max} \Rightarrow$

$T_D = \frac{\hbar\omega_{max}}{k}$  указывает для каждого вещества ту область температур, где становится существенным квантование энергии колебаний.

Пусть  $x = \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{T_D}{T}$ . Тогда

$$c = 9Nk \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}.$$

При  $T \ll T_D$  интеграл приблизительно постоянен, следовательно,  $c \propto T^3$  — **закон кубов Дебая**. При  $T \gg T_D$  получим:  $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$ ,  $\Rightarrow$

$$U = U_0 + \frac{9N\hbar}{\omega_{max}^3} \int_0^{\omega_{max}} \frac{kT}{\hbar\omega} \omega^3 d\omega = U_0 + 3NkT, \Rightarrow \boxed{c = 3Nk}.$$

Формула Дебая применима лишь для простых соединений, т.к. у тел сложной структуры спектр колебаний чрезвычайно сложен.

## 23 Начала термодинамики

### Дифференциальная форма первого начала

**Первое начало ТД:** внутренняя энергия  $U$  системы является однозначной функцией ее состояния и изменяется только под влиянием внешних воздействий,  $Q = U_2 - U_1 + A$ , где  $Q$  — сообщаемая системе теплота,  $A$  — совершенная ею работа. Для элементарного процесса 1-е начало ТД имеет вид:

$$\delta Q = dU + dA.$$

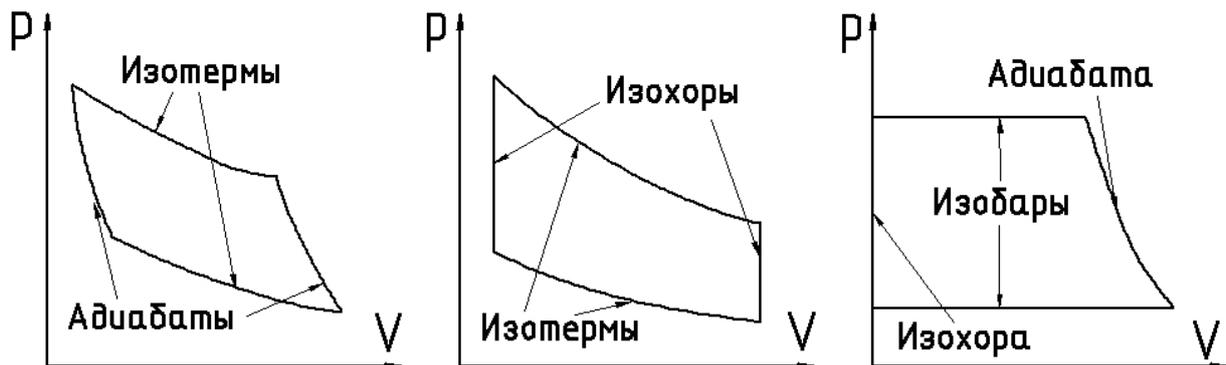
Кроме того, 1-е начало ТД можно трактовать как *невозможность вечного двигателя первого рода* (аппарата, производящего работу без затраты энергии). При равновесных процессах  $\delta Q = dU + \sum A_i a_i$ , где  $A_i$  – обобщенная сила,  $a_i$  – обобщенная координата. Следовательно,

$$\delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_1, \dots, a_n} dT + \sum_i \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial a_i} \right)_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, T} + A_i \right] da_i.$$

Для идеального газа  $dA = p dV$ ,  $\Rightarrow \boxed{\delta Q = dU + p dV}$ .

## Циклические процессы

**Термодинамическим циклом** называется круговой процесс, осуществляемый ТД системой. К важнейшим циклам относятся циклы Карно, Клапейрона, Клаузиуса–Ранкина и ряд других.



Циклы: Карно, Клапейрона и Клаузиуса–Ранкина

**Цикл Карно** состоит из двух изотерм и двух адиабат. КПД цикла,  $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – соответственно температуры нагревателя и холодильника тепловой машины. КПД всех остальных циклов ниже. Цикл Карно используется при моделировании теплового двигателя внутреннего сгорания.

**Цикл Клапейрона** состоит из двух изотерм и двух изохор. КПД цикла,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \frac{c_V(T_1 - T_2)}{R \ln(V_B/V_A)}},$$

где  $c_v$  – теплоемкость рабочего газа,  $V_B/V_A$  – отношение объемов газа в конце и в начале изотермического расширения,  $R$  – газовая постоянная.

**Цикл Клаузиуса–Ранкина** состоит из изохоры, адиабаты и двух изобар. КПД:  $\eta = 1 - (i_4 - i_1)/(i_3 - i_2)$ , где  $i_4 - i_1$  – разность энтальпий в изобарном процессе при давлении, соответствующем давлению окружающей двигатель среды,  $i_3 - i_2$  – разность энтальпий в изобарном процессе подвода теплоты к рабочему газу в камере сгорания. Данный цикл используется при моделировании жидкостного ракетного двигателя.

## Второе начало термодинамики. Понятие энтропии. Закон роста энтропии

Второе начало ТД выражает закон о существовании **энтропии**  $S$  у всякой равновесной системы и неубывании энтропии при любых процессах в полностью или адиабатически изолированных системах. Его формулировки:

1. невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу;
2. невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от менее нагретого тела к более нагретому;
3. невозможен вечный двигатель второго рода (устройство, которое без компенсации полностью превращает теплоту какого-либо тела в работу).

Определим энтропию как  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ . Докажем, что  $dS$  – действительно полный дифференциал.  $\delta Q = C_V dT + p dV$ ,  $\Rightarrow \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV$ ,  $\frac{\delta Q}{T} = d(C_V \ln T + R \ln V)$ . Следовательно, энтропия является полным дифференциалом.

В случае неравновесных процессов такое представление энтропии несправедливо. Математически из 2-го начала ТД следует, что  $\oint dS = 0$  для любого циркулярного процесса, т.к.  $S$  — однозначная функция состояния системы.

Т.о., запись  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  — выражение 2-го начала ТД. Отсюда следует **равенство Клаузиуса**:  $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ .

Для равновесных процессов 1-е начало ТД:  $TdS = dU + p dV$ .

Рассмотрим теперь неравновесный процесс.  $\delta Q_{\text{нр}} = dU + \delta A_{\text{нр}}$  при переходе из одного состояния в другое. Если же система переходит во второе состояние равновесно, то  $\delta Q = dU + \delta A$ ,  $\delta Q_{\text{нр}} - \delta Q = \delta A_{\text{нр}} - \delta A$ . Эта разность не может быть равна нулю, т.к. тогда можно было бы равновесно обратить неравновесный процесс. Она не может быть и больше нуля, т.к. иначе в круговом процессе системой совершалась бы ненулевая работа за счет теплоты источника безо всякой компенсации. Это означает, что при возвращении в исходное состояние разность  $\delta Q - \delta Q_{\text{нр}} > 0$  передается источнику тепла за счет внешней работы  $\delta A - \delta A_{\text{нр}}$ . Следовательно,  $\delta Q > \delta Q_{\text{нр}}$ ,  $\delta A > \delta A_{\text{нр}}$ ,  $\Rightarrow dS > \frac{\delta Q_{\text{нр}}}{T}$ .

Таким образом, можно дать две формулировки 2-го начала ТД для неравновесных процессов:

1. *Переход системы из начального состояния в конечное, совершаемый адиабатно равновесно, нельзя осуществить адиабатно неравновесно, и наоборот.*
2. **При адиабатном неравновесном процессе  $dS > 0$ , т.е. при этом энтропия системы возрастает.**

Процессы в изолированных системах проходят в направлении роста энтропии. Для неравновесных систем справедливо **неравенство Клаузиуса**:

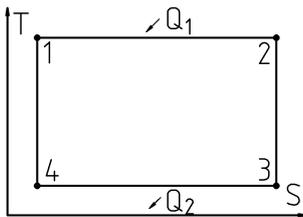
$$\oint \frac{\delta Q_{\text{нр}}}{T} < 0.$$

Т.о., получили **основное неравенство ТД**:

$$\boxed{TdS \geq dU + p dV}.$$

## Теорема Карно

Определим **коэффициент полезного действия** (КПД) тепловой машины как  $\eta = A/Q_1$ , где  $A$  – совершенная машиной работа,  $Q_1$  – количество теплоты, полученной машиной за один цикл. Из 1-го начала ТД  $A = \oint \delta Q = Q_1 - Q_2$ , где  $Q_2$  – теплота, отдаваемая рабочим телом. Тогда  $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ .



**Цикл Карно** состоит из двух изотерм и двух адиабат.

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1), \quad Q_2 = T_2(S_2 - S_1), \quad A = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1), \Rightarrow \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

**Первая теорема Карно:** КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего вещества и предельных адиабат, а определяется только температурами теплоотдача и теплоприемника.

Если машина работает по необратимому циклу и получает то же количество теплоты, что и при обратимом, то  $\eta_{\text{но}} = A_{\text{нр}}/Q_1$ , а т.к.  $\delta A_{\text{нр}} < \delta A$ , то  $\eta_{\text{но}} < \eta$ .

**Вторая теорема Карно:** КПД необратимой машины меньше КПД обратимой.

## Макро- и микросостояния системы. ТД вероятность. Статистическая интерпретация 2-го начала ТД

**Макроскопическое состояние** характеризуется **макроскопическими параметрами:**  $p$ ,  $V$ ,  $T$  и  $U$ . В равновесных состояниях все точки системы имеют одинаковые давление и температуру, следовательно, при помощи макроскопических параметров можно полностью описать макроскопическое состояние. **Микроскопическое состояние** характеризуется  $3n$  координатами и  $3n$  проекциями скоростей, которые проявляются как случайные величины. Естественно, ТД систему невозможно описать микроскопическими параметрами.

Согласно **эргодической гипотезе**, среднее по ансамблю равно средне-

му по времени. Значит, вероятность макросостояния есть отношение числа микросостояний, характеризующих данное макросостояние, к общему числу состояний, достижимых системой:

$$P_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0}.$$

Пусть  $V$  – занимаемый газом объем,  $n$  – число частиц, находящихся в нем.  $N = V/d^3$  – число ячеек, которые могут занять частицы,  $N \gg n$ ,  $d$  – характерный размер частиц.

Вероятность того, что в объеме  $V_1 \in V$  находятся  $m \leq n$  частиц, рассчитывается по формуле Бернулли (см. стр. 93):

$$P(V_1, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Рассмотрим теперь изотермический процесс и вычислим энтропию.  $p = RT/V$ ,  $\delta Q = p dV = RT dV/V = RT \ln V$ ,  $\Rightarrow dS = R d \ln V$ ,  $S_2 - S_1 = R \ln(V_2/V_1)$ .  $V_1$  и  $V_2$  связаны с числом микросостояний частиц газа:

$$\Gamma_{01} = \frac{N_1!}{(N_1 - N_A)!}, \quad \Gamma_{02} = \frac{N_2!}{(N_2 - N_A)!},$$

где  $N_A$  – число Авогадро.  $N_1 = V_1/d^3$ ,  $N_2 = V_2/d^3$ ,  $d \sim 10^{-10}$  м.  $\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{01}} = \frac{N_2! (N_1 - N_A)!}{N_1! (N_2 - N_A)!} \approx \frac{(N_2/e)^{N_2} [(N_1 - N_A)/e]^{N_1 - N_A}}{(N_1/e)^{N_1} [(N_2 - N_A)/e]^{N_2 - N_A}} = \frac{N_2^{N_2} (N_1 - N_A)^{N_1 - N_A}}{N_1^{N_1} (N_2 - N_A)^{N_2 - N_A}}.$$

При не слишком высокой степени сжатости газа  $N_1 \gg N_A$  и  $N_2 \gg N_A$ . Тогда

$$\frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{01}} \approx \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{N_A} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{N_A}, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{N_A} \ln \frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{01}}, \quad \Rightarrow .$$

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{N_A} \ln \frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{01}} = k(\ln \Gamma_{02} - \ln \Gamma_{01}).$$

Следовательно, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, посредством которых реализуется рассматриваемое макросостояние.

Равенство, выражающее это утверждение, называется **формулой Больцмана**:

$$S = k \ln \Gamma.$$

Т.о., **энтропия** — это мера упорядоченности системы.

Очевидно, что предоставленная сама себе, система движется в направлении равновесного состояния, т.е. ее **энтропия не уменьшается**, т.к. состояние равновесия — наиболее вероятное и характеризуется наибольшим числом микросостояний.

### Третье начало ТД

Энтропия вводится с помощью дифференциального соотношения  $dS = \delta Q/T$ , поэтому она может быть определена лишь с точностью до произвольной постоянной, которая не может быть найдена из 1-го или 2-го начал ТД. В связи с этим невозможно найти абсолютное значение энтропии.

**Третье начало ТД** (принцип Нернста): *при любом изотермическом процессе, проведенном при абсолютном нуле температуры, изменение энтропии равно нулю:  $\Delta S_{T=0} = 0$ , независимо от изменения любых других параметров системы.*

Третье начало не позволяет найти абсолютное значение энтропии, но позволяет положить  $S_0 = 0$  (*принцип Нернста в формулировке Планка*). Т.о., если следовать формуле Больцмана, термодинамическая вероятность состояния системы при абсолютном нуле равна 1, и характеризуется единственным микросостоянием  $\Gamma_0 = 1$ ,  $\Rightarrow S = k \ln 1 = 0$ .

Для всех тел при  $T = 0$  теплоемкости  $C_V$  обращаются в нуль. Также при абсолютном нуле обращается в нуль коэффициент объемного расширения.

Главным выводом третьего начала ТД является **недостижимость абсолютного нуля температуры**.

## 24 Реальные газы

### Реальный газ

**Реальный газ** — такой газ, между молекулами которого существуют силы взаимодействия. **Силами Ван дер Ваальса** (ВдВ) называют слабые силы притяжения, действующие между молекулами на расстояниях порядка  $10^{-9}$  м, и возникающие вследствие того, что при небольшом смещении зарядов в нейтральной молекуле, она превращается в диполь.

Силы ВдВ имеют электрическую природу и делятся на три типа:

1. *Ориентационные силы притяжения* полярных молекул обусловлены преимущественной ориентацией дипольного электрического момента  $\vec{p}_e$  одной полярной молекулы в электрическом поле другой молекулы:

$$F_{\text{оп}} = 4 \frac{p_e^4}{kT} \frac{1}{r^7},$$

где  $r$  — расстояние между молекулами.

2. *Индукционные силы притяжения* полярных молекул связаны с изменением дипольных моментов молекул под влиянием электрических полей этих молекул:

$$F_{\text{инд}} = 12\alpha p_e^2 \frac{1}{r^7},$$

где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы.

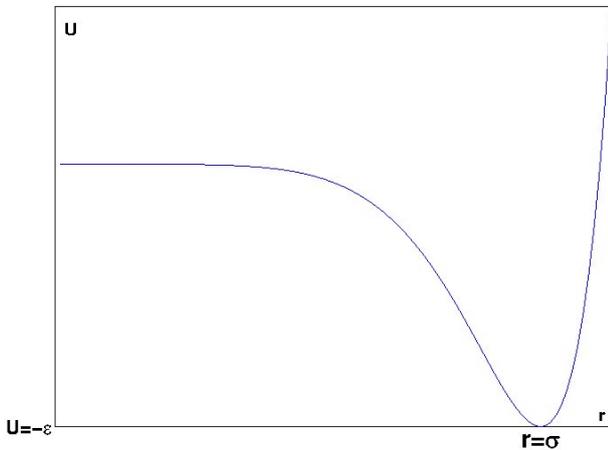
3. *Дисперсионные силы притяжения* действуют как между полярными, так и между неполярными молекулами. Эти силы имеют квантовомеханическое происхождение. Благодаря движению электронов их конфигурация в молекулах непрерывно меняется, т.е. молекула обладает мгновенным электрическим моментом, вызывая соответствующую деформационную поляризацию соседней молекулы.

$$F_{\text{дисп}} = \frac{9}{2} \alpha^2 h\nu_0 \frac{1}{r^7},$$

где  $\nu_0$  — частота колебаний осциллятора (часто величина  $h\nu$  близка к энергии ионизации молекулы).

На малых расстояниях между молекулами силы отталкивания препятствуют проникновению другой молекулы в занимаемую данной молекулой область пространства. Характер зависимости  $U(r)$  имеет сложный вид и обычно аппроксимируется формулой

$$U = \frac{a_1}{r^n} - \frac{a_2}{r^m}.$$



Хорошо аппроксимирует  $U(r)$  потенциал Леннарда-Джонса:

$$U = 4U_0 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right],$$

где  $\sigma$  – расстояние, на котором  $U = 0$ ,  $U_0$  – абсолютное значение минимальной энергии взаимодействия молекул. Второе слагаемое характеризует силы ВдВ.

Пусть  $E = E_k + U$  – полная энергия газа. Тогда, если  $E > 0$ , газ стремится занять все предоставленное ему пространство. Если же  $E < 0$ , газ конденсируется в жидкость. При достаточно высокой температуре  $E_k$  столь высока, что газ уже нельзя конденсировать посредством увеличения плотности (**критическая температура**).

Т.о., при малых плотностях в газах действуют силы притяжения, а при больших — силы отталкивания.

## Уравнение Ван дер Ваальса. Изотермы Ван дер Ваальса

Уравнение состояния газа зависит от взаимодействия между молекулами, поэтому каждый сорт молекул имеет свое уравнение состояния.

Точное уравнение состояния можно представить в виде

$$pV_m = RT + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i(T)}{V_m^i},$$

где  $A_i$  – **вириальные коэффициенты**.

В уравнении идеального газа  $pV = \nu RT$  не учтено наличие сил притяжения и отталкивания между молекулами. Естественно, что отталкивание характеризуется эффективным объемом молекулы, т.к. оно сводится к тому, что молекула не допускает в занимаемый ею объем другие молекулы.

Пусть суммарный эффективный объем молекул газа равен  $mb'$ . Тогда учет сил отталкивания сводится к тому, что для молекул доступен не весь объем, а  $V - mb'$ .

Наличие же сил притяжения приводит к появлению дополнительного внутреннего давления на газ. Сила давления на одну молекулу  $F_0$  пропорциональна  $n_0$  – концентрации молекул, а все давление, в свою очередь, пропорционально  $n_0 F_0$ , т.е.  $p \propto n_0^2$ , или, что то же самое,  $p_{\text{доп}} \propto m^2/V^2$ . Наличие этого дополнительного давления приводит к уменьшению внешнего давления, необходимого для удержания газа в заданном объеме.

Из этих выводов следует **уравнение Ван дер Ваальса**:

$$\left( p + \frac{m^2 a'}{V^2} \right) (V - mb') = \frac{m}{\mu} RT,$$

где  $a'$  и  $b'$  – **постоянные Ван дер Ваальса**. Пусть  $v = V/m$  – удельный объем газа,  $R_0 = R/\mu$  – удельная газовая постоянная. Тогда уравнение можно переписать так:

$$\left( p + \frac{a'}{v^2} \right) (v - b') = R_0 T.$$

Существует еще две формы уравнения ВдВ:

$$\left( p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT, \quad a = a' \mu^2, \quad b = b' \mu;$$

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT, \quad V_m = V/\nu.$$

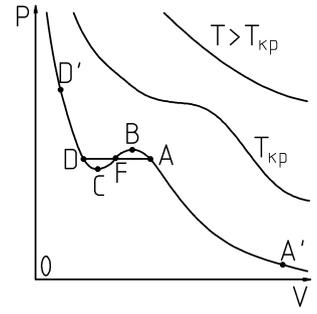
Представим уравнение ВдВ в виде полинома

$$pV_m + \frac{a}{V_m} - bp + \frac{ab}{V_m^2} = RT, \quad pV_m^3 - (RT + bp)V_m^2 + aV_m + ab = 0,$$

$$\boxed{V_m^3 + A_1 V_m^2 + A_2 V_m + A_3 = 0}, \quad A_1 = -\left( b + \frac{RT}{p} \right), \quad A_2 = \frac{a}{p}, \quad A_3 = \frac{ab}{p}.$$

Получили многочлен третьей степени, следовательно, изотерма газа ВдВ может иметь три вида, т.е. она пересекается прямой  $p = \text{const}$  в одной, в двух, либо в трех точках.

Изотермы при  $T = T_{\text{кр}}$  и  $T > T_{\text{кр}}$  хорошо согласуются с экспериментами, однако, изотермы при  $T < T_{\text{кр}}$  отличаются от экспериментальных данных.



На участке  $CB$  давление растет с ростом объема, такая фазовая траектория не может существовать, т.к. малейшие флуктуации самопроизвольно будут увеличиваться. Согласно эксперименту, система переходит через двухфазное состояние по прямой  $DA$ . Осуществляя обратимо процессы  $DCBA$  и  $DFA$ , можно записать:  $\int_{DFA} \frac{\delta Q}{T_1} = \int_{DCBA} \frac{\delta Q}{T_1}$ . Т.к.  $T_1 = \text{const}$ ,  $\delta Q = dU + p dV$ ,  $\Rightarrow$

$$U(A) - U(D) + \int_{DFA} p dV = U(A) - U(D) + \int_{DCBA} p dV, \quad \Rightarrow \quad \int_{DFA} p dV = \int_{DCBA} p dV.$$

Т.о., площади  $DCFD$  и  $FBAF$  равны.

Из диаграммы следует, что  $AA'$  — газообразное состояние,  $DD'$  — жидкое,  $AD$  — **метастабильное состояние** (перегретая жидкость и переохлажденный пар).

Уравнение ВдВ хорошо описывает систему жидкость-газ в качественном смысле, но в количественном отличается от эксперимента. Во-первых, постоянные  $a$  и  $b$  на самом деле являются функциями температуры. Во-вторых, величина  $p_{\text{кр}} V_{\text{кр}} / (RT_{\text{кр}}) = 3/8$  должна быть постоянной для всех газов, на самом деле это не так. В-третьих, согласно наблюдениям,  $V_{\text{кр}} \approx 2b$ , а не  $3b$ . В-четвертых, в области двухфазного состояния уравнение ВдВ не объяснимо теоретически и дает расхождение с экспериментом.

### Внутренняя энергия вандервальсовского газа

$$U = C_V T + E_p, \quad E_p = \int_{\infty}^V \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V} \quad (\text{нижний предел — при равенстве потенциальной энергии нулю}). \quad \text{Следовательно, } U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

Можно получить внутреннюю энергию ТД методами.

$$dU = C_V dT + \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right) dV.$$

$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ ,  $T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{RT}{V-b} = p + \frac{a}{V^2}$ ,  $\Rightarrow dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$ . Пусть  $U = 0$  при  $T = 0$ ,  $V = \infty$ . Тогда

$$U = \int_0^T C_V dT + \int_{\infty}^V \frac{a}{V^2} dV = C_V T - \frac{a}{V},$$

теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры.

### Критические параметры

Критическая точка изотермы ВдВ является точкой перегиба. Следовательно,  $\frac{d^2 p}{dV^2} = 0$ ,  $\frac{dp}{dV} = 0$ ,  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} RT_k V_{mk}^3 = 2a(V_{mk} - b)^2, \\ RT_k V_{mk}^4 = 6a(V_{mk} - b)^3; \end{cases} \quad p_k = \frac{RT_k}{V_{mk} - b} - \frac{a}{V_{mk}^2}.$$

$$\boxed{V_{mk} = 3b}, \quad \boxed{p_k = \frac{a}{27b^2}}, \quad \boxed{T_k = \frac{8a}{27bR}}.$$

### Эффект Джоуля-Томсона. Методы получения низких температур

За счет молекулярных сил взаимодействия, при расширении газа без теплообмена, его температура должна изменяться — **дифференциальный закон Джоуля-Томсона**. Если средняя энергия взаимодействия между молекулами уменьшается, газ нагревается, иначе — охлаждается. При различных давлениях эффект имеет разные знаки (это характеризуется кривой  $U(r)$ ).

Пусть газ проходит через пористую перемычку из состояния 1 в состояние 2. Тогда  $\Delta U_1 + p_1 \Delta V_1 = \Delta U_2 + p_2 \Delta V_2$ . Введем понятие **энтальпии**

$H = U + pV$ , т.о.,  $H = \text{const.}$

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp = 0;$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p = C_p, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Отсюда получим выражение для **дифференциального эффекта Джоуля-Томсона**

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right].$$

Для идеального газа  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{V}{T}$ ,  $\Rightarrow$  эффект Джоуля-Томсона отсутствует.

Если давления  $p_1$  и  $p_2$  отличаются на конечную величину, то процесс Джоуля-Томсона можно представить в виде последовательности квазистационарных процессов, в каждом из которых давление изменяется на  $dp$ , получим **интегральный закон Джоуля-Томсона**:

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H dp = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] dp.$$

В газе ВдВ  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} + \frac{a}{RT^2}$ ,  $\Rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2a}{RT} - b \right)$ . Температуру  $T_{\text{инв}} = \frac{2a}{Rb}$  называют **температурой инверсии**. При  $T < T_{\text{инв}}$  газ при расширении охлаждается, при  $T > T_{\text{инв}}$  нагревается.

$H = U + pV = C_V T - \frac{a}{V} + pV$ . Пусть газ достаточно разрежен, т.е. ведет себя как идеальный. Тогда  $C_V T - \frac{a}{V} + pV = C_V T' + p'V'$ ,  $pV = \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V}$ . Получим интегральный закон Джоуля-Томсона:

$$T' - T \equiv \Delta T = \int_{p_1}^{p_2} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H dp = \frac{1}{C_p} \left( RT \frac{b}{V-b} - \frac{2a}{V} \right),$$

причем здесь  $T'_{\text{инв}} = \frac{2a}{Rb} \left( 1 - \frac{b}{V} \right)$ .

Для большинства газов температура инверсии превышает комнатную, поэтому они охлаждаются при расширении.

Если температура газа меньше критической, его можно перевести в жидкое состояние простым сжатием. Однако, у большинства газов критическая температура очень мала. Для ее достижения используется охлаждение газа в процессе Джоуля-Томсона и при адиабатическом расширении.

Порция сжатого газа расширяется и охлаждает другую сжатую порцию, т.е. после расширения вторая порция газа охлаждена сильнее.

В холодильных машинах комбинируют эффект Джоуля-Томсона и адиабатный процесс. При этом процесс совершается квазинепрерывно, т.е. часть газа возвращается на стадию сжатия и по пути охлаждает очередную порцию газа — **метод противоточного теплообмена**. Устройство, где это происходит, называют **теплообменником**, устройство, где газ охлаждается за счет адиабатного расширения, называется **детандером**, устройство для изотермического сжатия — **компрессор**.

С помощью жидких газов можно охладить другие объекты, т.к. при этом достаточно велик теплообмен. Минимальная температура конденсации составляет 0.7 К (у гелия). Для получения более низких температур применяют **метод магнитного охлаждения**. Парамагнетик намагничивается в контакте с жидким гелием. Затем контакт размыкается и парамагнетик адиабатно размагничивается. Таким методом достижимы температуры до  $10^{-3}$  К.

## 25 Термодинамические потенциалы

### Метод термодинамических потенциалов

Метод ТД потенциалов (метод характеристических функций) был развит Гиббсом. Исходным положением является основное уравнение ТД:  $T dS = dU + \sum A_i da_i$ , или  $T dS = dU + p dV$ .

Это уравнение связывает 5 функций состояния, само же состояние системы определяется двумя параметрами, поэтому, чтобы определить еще 3 неиз-

вестных функции, необходимо добавить к первому началу ТД еще два **уравнения состояния**: **термическое**  $U = U(V, T)$  и **калорическое**  $p = p(V, T)$ .

В качестве независимых переменных определяют обычно две из четырех величин  $p$ ,  $V$ ,  $T$  и  $S$ :  $(S, V)$ ,  $(T, V)$ ,  $(S, p)$ ,  $(T, p)$ . Для любой такой пары существует функция состояния  $\varphi(X_1, X_2)$ , дифференциал которой является полным и может быть преобразован к виду, не содержащему  $\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}$ . Такие функции и называют **термодинамическими потенциалами системы**.

### Основные термодинамические потенциалы

1. **Внутренняя энергия**:  $U = U(S, T)$ ,  $dU = T dS - p dV$ .
2. **Свободная энергия** (функция Гельмгольца):  $F = F(V, T)$ ,  $\delta A = p dV = -dU + T dS$ . При  $T = \text{const}$ ,  $\delta A = -d(U - TS) = -dF$ ,  $\Rightarrow F = U - TS$ .  $dF = dU - T dS - S dT = T dS - p dV - T dS - S dT$ ,  $\Rightarrow dF = -(S dT + p dV)$ .
3. **Энтальпия**:  $H = H(S, p)$ ,  $T dS + V dp = T dS + d(pV) - p dV = d(U - pV) = dH$ ,  $\Rightarrow H = U + pV$ ,  $dH = T dS + V dp$ .
4. **ТД потенциал Гиббса**:  $\Phi(T, p)$ ,  $-S dT + V dp = -S dT - p dV + d(pV) = d(F + pV) = d\Phi$ ,  $\Rightarrow \Phi = F + pV$ ,  $d\Phi = -S dT + V dp$ .

Т.к.  $d\varphi(X_1, X_2) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}\right)_{X_2} dX_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}\right)_{X_1} dX_2$ , получим:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S,$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T.$$

Используя соотношения между частными производными

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1,$$

получим **соотношения Максвелла** (ТД тождества):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Все ТД потенциалы — аддитивные и однозначные функции состояния, их убыль при соответствующих условиях определяет работу системы против действующих на нее сил.

Из связи ТД потенциалов между собой следует, что если известен хотя бы один, то можно найти все остальные.

## Условия равновесия и устойчивости однородной системы

Состояние устойчивости сопровождается максимальным значением энтропии, что и является **основным критерием ТД устойчивости**: *состояние адиабатно изолированной системы устойчиво при максимуме энтропии системы.*

Общая теория ТД устойчивости развита Гиббсом:

1. При всех возможных изменениях состояния системы, не влияющих на ее энергию, вариация энтропии исчезает или отрицательна.
2. При всех возможных изменениях состояния системы, не влияющих на ее энтропию, вариация энергии исчезает или положительна.

## Частные случаи

1.  $V = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ . Неравенство Клаузиуса:  $\delta Q < T dS$ . Из первого начала:  $dU + p dV - T dS < 0$ ,  $\Rightarrow \boxed{dU < 0}$  — устойчивое состояние происходит при минимальном значении внутренней энергии.
2.  $p = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ . Т.к.  $H = U + pV$ , получим:  $\boxed{dH < 0}$  — минимум энтальпии.
3.  $V = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ :  $d(U - TS) < 0$ . А т.к.  $F = U - TS$ , получим условие минимума свободной энергии  $\boxed{dF < 0}$ .
4.  $T = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ .  $\Phi = H - TS$ ,  $dH + p dV - T dS = dU + d(pV) - V dp - d(TS) + S dT = d(U + pV - TS) - V dp + S dT = d\Phi - V dp + S dT$ ,  $\Rightarrow$  получим условие минимума ТД потенциала Гиббса:  $\boxed{d\Phi < 0}$ .

**Принцип ле Шателье–Брауна:** если на систему, находящуюся в устойчивом ТД равновесии, воздействуют внешние факторы, стремящиеся вывести ее из этого состояния, то в системе возникают процессы, стремящиеся уничтожить изменения, вызванные внешними воздействиями.

## Термодинамическое описание веществ

Различные ТД потенциалы связаны друг с другом, при этом  $U$  связана с  $F$  так же, как и  $H$  с  $\Phi$ . Т.к.  $F = U - TS$ ,  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$  и  $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ , получим **уравнения Гиббса-Гельмгольца**:

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V ; \quad H = \Phi - T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p .$$

Интегрируя эти уравнения, можно найти свободную энергию или ТД потенциал Гиббса по известным внутренней энергии или энтальпии.

## Термодинамика магнетиков

Полная элементарная работа по намагничиванию вещества  $\delta A = -\frac{V\vec{H}}{4\pi}d\vec{B}$ . Ограничимся рассмотрением однородных полей и однородных изотропных магнетиков:  $\delta A = -\frac{VH}{4\pi}dB$ . Тогда дифференциал внутренней энергии  $dU = T dS + \frac{VH}{4\pi}dB$ . Т.к.  $\vec{B} = \vec{H} + \frac{4\pi}{V}\vec{M}$ , где  $\vec{M}$  – вектор намагничения (средний магнитный момент поля), получим:  $\delta A = -d\left(\frac{VH^2}{8\pi}\right) - H dM$ .

Пусть  $U^* = U - \frac{VH^2}{8\pi}$ , тогда  $dU^* = T dS + H dM$ .

Т.о., для перехода от ТД газов к ТД магнетиков необходимо заменить  $p$  на  $-H$  и  $V$  на  $M$ . Для газов  $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV$ . Если  $U = U(T)$ , то  $\frac{dU}{T}$  – полный дифференциал, а тогда полным дифференциалом будет и  $\frac{p}{T}dV$ .

$V = V(p/T)$ ,  $M = M(H/T)$ . Запишем в безразмерной форме:  $\frac{M}{M_0} = L\left(\frac{M_0 H}{RT}\right)$ . Функция  $L$  может быть получена только методами статистической физики и называется **обобщенной функцией Ланжевена**.

### Термодинамика диэлектриков

Аналогично,  $\delta A = -\frac{V}{4\pi} E dD$ , т.е. в уравнении состояния необходимо заменить  $p$  на  $-\frac{V}{4\pi} E$ ,  $V$  на  $D$ .

Тогда получим  $dU = T dS + \frac{V}{4\pi} E dD$ .  $\vec{D} = \vec{E} + \frac{4\pi}{V} \vec{p}$ ,  $\Rightarrow \delta A = -d\left(\frac{VE^2}{8\pi}\right) - E dp$ .  $U^* = U - \frac{VE^2}{8\pi}$ ,  $dU^* = T dS + E dp$ .

Функция Ланжевена:  $\frac{p}{p_0} = L\left(\frac{p_0 E}{RT}\right)$ .

### Химический потенциал, магнитная восприимчивость

Для систем с переменным числом частиц  $dU = \delta Q - \delta A + \sum \mu_k dN_k$ .  $dN_k = (dN_k)^{(e)} + (dN_k)^{(i)}$  – изменение числа частиц сорта  $k$  за счет обмена с окружающей средой ( $e$ ) и химических реакций ( $i$ ).  $\delta Q = T dS$ ,  $\delta A = \sum A_i da_i$ . Тогда получим:

$$T dS = dU + \sum A_i da_i + \sum \mu_k dN_k.$$

$\mu_k = \left(\frac{\partial U}{\partial N_k}\right)_{S, a_i}$  – **химический потенциал**  $k$ -го сорта частиц.

Для простых систем  $dU = T dS - p dV + \sum \mu_k dN_k$ ,  $dF = dU - T dS - S dT = -S dT - p dV + \sum \mu_k dN_k$ ;  $d\Phi = -S dT + V dp + \sum \mu_k dN_k$ ;  $dH = T dS + V dp + \sum \mu_k dN_k$ .

Для магнетиков обычно  $\frac{M_0 H}{RT} \ll 1$ ,  $\Rightarrow M = M_0 L\left(\frac{M_0 H}{RT}\right) \approx M_0^2 \frac{L'(0)H}{RT}$ ,  $\Rightarrow$

**закон Кюри:**  $M = \chi_m H = \frac{AH}{T}$ , где  $\chi_m = \frac{M_0^2 L'(0)}{RT}$  – **магнитная восприимчивость**.

Т.о.,  $\mu = \chi_m(T)H$ ,  $B = \mu(T)H$ , где  $\mu = 1 + \frac{4\pi\chi_m(T)}{V}$  – **магнитная проницаемость**.

Аналогично для диэлектриков:  $\chi_e = \frac{p_0^2 L'(0)}{RT} = \frac{A}{T}$  – **диэлектрическая восприимчивость**.  $p = \chi_e(T)E$ ,  $D = \varepsilon(T)E$ , где  $\varepsilon = 1 + \frac{4\pi}{V} \chi_e(T)$  – **диэлектрическая проницаемость**.

## 26 Твердые тела

### Кристаллические и аморфные состояния. Кристаллы

Большинство ТТ имеют кристаллическое строение. Характерная особенность кристаллического состояния — **анизотропия** — зависимость ряда свойств от направления внутри кристалла.

Анизотропия обусловлена упорядоченным расположением частиц. У макроскопических кристаллов анизотропия часто не проявляется, из-за их **поликристаллической** структуры. В специальных условиях можно вырастить большие одиночные кристаллы — **монокристаллы**.

**Аморфные тела** не имеют упорядоченности.

Кристаллы обычно бывают: **ионные** (с гетерополярной или ионной связью), **атомные** (с гомеополярной или ковалентной связью); **молекулярные** (с вандерваальсовскими связями); **металлические** (взаимодействие ионов с электронным газом).

### Симметрия кристаллов. Элементы точечной и трансляционной симметрии

Операции, в результате которых объект преобразовывается сам в себя, называют **симметричными преобразованиями**. Два вида равенства: совместимое (конгруэнтное) и зеркальное.

**Основные элементы симметрии:** поворотная ось симметрии (простая или зеркальная), зеркальная плоскость симметрии, центр симметрии, центр инверсии.

**Порядок оси** симметрии  $n = 2\pi/\alpha$ , где  $\alpha$  — элементарный угол, при повороте на который фигура совмещается сама с собой. В **символике Браве** (используется для описания кристаллов) приняты обозначения:  $L_n$  — ось симметрии порядка  $n$ ,  $P$  — зеркальная плоскость симметрии,  $C$  — центр симметрии.

Зеркальная поворотная симметрия — поворот вокруг  $L_n$  с последующим

отражением относительно  $P$ . Инверсионная симметрия — поворот вокруг  $L_n$  с отражением относительно  $C$ .

Если взять произвольно выбранный атом, всю кристаллическую решетку можно получить посредством переноса атома на вектор  $\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , где  $m$ ,  $n$  и  $p$  — целые числа,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — **трансляции** (вектора переноса).

Решетку можно описать с помощью периодически повторяющегося в пространстве элементарного параллелепипеда — **элементарной ячейки**, построенного на трех некопланарных векторах переноса. В общем случае элементарная ячейка представляет собой косоугольный параллелепипед с направляющими углами  $\alpha = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$ ,  $\beta = (\widehat{\vec{c}, \vec{a}})$ ,  $\gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ . Совокупность векторов переноса и направляющих углов называется **параметрами решетки**, а модули векторов переноса — **постоянными решетки**.

Элементарный параллелепипед, построенный на кратчайших трансляциях, называется **основным параллелепипедом решетки**. Он не имеет дополнительных узлов ни в какой точке внутри или на поверхности, т.е. является примитивной элементарной ячейкой решетки.

Обычно за элементарную ячейку выбирают ячейку большего объема. **Базис ячейки** — совокупность координат узлов элементарной ячейки. Каждый узел обозначают в виде набора координат  $[[x y z]]$ .

**Объемноцентрированная ячейка** имеет дополнительный узел в центре на пересечении телесных диагоналей. Ее базис имеет вид  $[[0 0 0]]$ ,  $[[1/2 1/2 1/2]]$ .

**Базоцентрированная ячейка** имеет центрированное основание. Ее базис:  $[[0 0 0]]$ ,  $[[1/2 1/2 0]]$ .

Базис **бокоцентрированной ячейки**:  $[[0 0 0]]$ ,  $[[1/2 0 1/2]]$ , либо  $[[0 0 0]]$ ,  $[[0 1/2 1/2]]$ .

**Гранецентрированная ячейка** имеет дополнительный узел в центре всех граней:  $[[0 0 0]]$ ,  $[[0 1/2 1/2]]$ ,  $[[1/2 0 1/2]]$ ,  $[[1/2 1/2 0]]$ .

## Сингонии

Согласно трансляционной симметрии, выделяют шесть **сингоний** (примитивных элементарных ячеек):

1. триклинная,  $a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \pi/2$ ;
2. моноклинная,  $a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = \pi/2 \neq \beta$ ;
3. ромбическая,  $a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ ;
4. тетрагонная,  $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ ;
5. гексагонная,  $a = b \neq c, \alpha = \beta = \pi/2, \gamma = 2\pi/3$ ;
6. кубическая,  $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ .

## Решетки Браве

Браве математически доказал, что существует 14 типов трансляционных решеток, отличающихся по виду симметрии, и сформулировал *три условия, позволяющих выбрать ячейку, характеризующую данную решетку*:

1. Сингония выбранной ячейки совпадает с сингонией решетки.
2. Число прямых углов и равных сторон сингонии должно быть максимально.
3. Объем ячейки должен быть минимальным.

## Решетки Браве:

1. триклинная примитивная;
2. моноклинная: примитивная, базоцентрированная;
3. ромбическая: примитивная, базоцентрированная, объемноцентрированная, гранецентрированная;
4. тетрагонная: примитивная, объемноцентрированная;
5. гексагонная: примитивная, бокоцентрированная;
6. кубическая: примитивная, объемноцентрированная,

**Плотность упаковки** атомов кристаллической структуры является долей объема кристалла, занятой непосредственно атомами. Наибольшей плотностью упаковки обладают гранецентрированная кубическая структура

(74%) и (с еще большей плотностью упаковки) гексагональная плотно упакованная структура.

### Индексы Миллера

Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  – параметры элементарной ячейки. Тогда любая совокупность параллельных плоскостей можно характеризовать тремя числами. Транслируем плоскость, чтобы она проходила через узел  $[[0\ 0\ 0]]$ . Ее уравнение тогда примет вид  $hx + ky + lz = 0$ . Параметры  $h$ ,  $k$  и  $l$  называют **миллеровскими индексами плоскости**, а плоскость в миллеровских индексах обозначают как  $(h\ k\ l)$ . Индексы Миллера обратно пропорциональны отрезкам, отсекаемым плоскостью от координатных осей. **Миллеровские индексы узла** определяют координаты узла в постоянных решетке:  $[[m\ n\ o]]$ ,  $m = x/a$ ,  $n = y/b$ ,  $o = z/c$ .

Аналогично вводятся индексы Миллера для прямых: прямая параллельно переносится в узел  $[[0\ 0\ 0]]$ , **индекс прямой** имеет вид  $[m\ n\ p]$ .

### Изо- и полиморфизм

Многие кристаллы содержат незначительное количество примесей. Такие примеси называют **изоморфными**. Кристаллы с различным содержанием примесей обладают почти тождественной кристаллической формой. **Изоморфизм** — явление взаимозамещения ионов (атомов) в узлах кристаллической решетки без нарушения ее строения.

Меняя состав изоморфных кристаллов, можно добиваться тех или иных физических свойств.

Одинаковые по строению вещества могут иметь разные кристаллические структуры (модификации). Такое явление называют **полиморфизмом**. Наиболее стабильным полиморфом является тот, у которого свободная энергия  $F = E - TS$  минимальна.

## Дефекты. Дислокации

Дефекты кристаллических решеток бывают макроскопическими (поры, трещины) и микроскопическими. Микроскопические дефекты делятся на 4 категории:

1. **Точечные** (0-мерные): вакансии (отсутствие атома в узле решетки); атомы в междоузлиях; замена атома чужеродным. Эти дефекты называют *термодинамически равновесными*, их концентрация при нагревании кристалла возрастает экспоненциально.
2. **Линейные** (1-мерные) *нарушают дальний порядок в кристалле, искажая его структуру*: дислокации, делятся на краевые и винтовые (излишние кристаллические плоскости); микротрещины.
3. **Поверхностные** (2-мерные): стенки доменов; поверхность кристалла; дефекты упаковки.
4. **Объемные** (3-мерные): микропустоты; вкрапления другой фазы.

**Тепловые точечные дефекты** делятся на два вида: по Френкелю (атом покидает свое место и «застревает» в междоузлии) и по Шоттки (атом покидает кристалл, сублимируя с его поверхности).

**Дислокации** — линии, отделяющие области «нормальной» и смещенной частей решетки. Краевая дислокация — дополнительная кристаллическая плоскость, перпендикулярна сдвигу плоскостей. Винтовая дислокация параллельна сдвигу плоскостей (винтообразное смещение кристаллических плоскостей).

**Контур Бюргерса** — замкнутый контур произвольной формы, составленный из основных векторов трансляции идеального кристалла. В реальных кристаллах дефекты приводят к разрыву контура Бюргерса. **Вектор Бюргерса** — вектор смещения, который необходимо вставить в контур Бюргерса реального кристалла, чтобы замкнуть его.

Дислокация вдоль всей своей длины имеет постоянную величину вектора Бюргерса, следовательно, она не может оборваться нигде внутри кристалла. Вектор Бюргерса для кристалла, замыкающийся вокруг нескольких дисло-

каций, равен сумме векторов для каждой дислокации в отдельности.

## Жидкие кристаллы

**Жидкие кристаллы** — вещество, находящееся в промежуточном состоянии между твердым и жидким. Нашли широкое применение благодаря вращению плоскости поляризации проходящего сквозь них излучения в зависимости от величины приложенного электрического поля.

Жидкие кристаллы делятся на **смектики**, имеющие одномерную пространственную упорядоченность; **нематики**, обладающие ориентационной упорядоченностью; **холестерики**, имеющие слоистую упорядоченность в виде постепенно закручивающейся спирали.

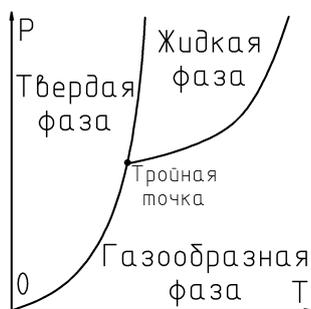
## 27 Фазовые переходы

### Фаза. Классификация фазовых переходов по Эрнфесту.

#### Тройная точка

**Фаза** — физически однородная часть системы.

Разные фазы одного и того же вещества могут находиться в равновесии, соприкасаясь друг с другом. Это верно лишь в ограниченных интервалах температур при строго определенных давлениях. На диаграмме  $(p, T)$  совокупность состояний равновесия двух фаз изображается линией  $p = f(T)$ .



Переход вещества из одной фазы в другую зачастую сопровождается выделением или поглощением **теплоты фазового перехода** (или скрытой теплоты). Такие переходы называют **фазовыми переходами первого рода (ФП1)**.

Существуют также превращения (например, одной кристаллической модификации в другую), не связанные со скрытой теплотой. Они называются **фазовыми переходами второго**

рода (ФП2).

При ФП2 не изменяется плотность тела. Скачком изменяется его теплоемкость и некоторые другие величины. Например, переход железа из ферромагнитного в парамагнитное состояние.

Возможно состояние, когда все три фазы одного и того же вещества будут находиться в равновесии — **тройная точка**.

Бывают следующие виды ФП1:

- **Испарение и конденсация:** прямой и обратный переходы между жидкой и газообразной фазами.
- **Плавление и кристаллизация:** прямой и обратный переходы между твердой и жидкой фазами.
- **Сублимация:** переход между твердым и газообразным состоянием.

Существуют также вещества с двумя кристаллическими модификациями. Они имеют две тройных точки на диаграмме состояния.

## Термодинамический потенциал Гиббса как функция состояния

**ТД потенциал Гиббса**  $\Phi = F + pV = H - TS$ ,  $d\Phi = -S dT + V dp$ . При изотермических процессах убыль  $\Phi$  равна работе при адиабатических процессах расширения системы.

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  компонент. Тогда для нее ТД потенциал Гиббса  $\Phi = \Phi(T, p, n_1, \dots, n_N)$ , где  $n_i$  — число частиц  $i$ -й компоненты. Тогда  $d\Phi = -S dT + V dp + \sum \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_{k \neq i}} dn_i$ .

Внутренняя энергия данной системы  $U = T dS - p dV + \sum \mu_i dn_i$ , где  $\mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{V, S, n_{k \neq i}}$  — **химический потенциал**.

Тогда  $d\Phi = -S dT + V dp + \sum \mu_i dn_i$ ,  $\mu_i = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_{k \neq i}}$ . Равновесие наступает при постоянных давлении и температуре:  $(d\Phi)_{T, p} = 0$ .

Рассмотрим систему, состоящую из двух компонент ( $a$  и  $b$ ), находящихся

в двух фазовых состояниях (1 и 2). Тогда  $n_{a1} + n_{a2} = \text{const}$ ,  $n_{b1} + n_{b2} = \text{const}$ .  $d\Phi_i = -S dT + V dp + \mu_{ai} dn_{ai} + \mu_{bi} dn_{bi}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Т.к.  $\Phi$  — аддитивная функция, то  $(d\Phi)_{T,p} = (d\Phi_1)_{T,p} + (d\Phi_2)_{T,p} = 0$ ,  $\Rightarrow (\mu_{a1} - \mu_{a2})dn_{a1} + (\mu_{b1} - \mu_{b2})dn_{b1} = 0$ , т.е.  $\boxed{\mu_{a1} = \mu_{a2}}$ ,  $\boxed{\mu_{b1} = \mu_{b2}}$ .

Итак,  $(d\Phi)_{T,p} = \sum_{i,j} \mu_{ij} dn_{ij} = 0$ ,  $\mu_{ij} = \mu_{ik}$ .

Пусть у нас есть  $K$  компонент и  $N$  фаз. Для всех  $i$  существует  $N - 1$  равенств  $\mu_{ij} = \mu_{ik}$ . Всего для  $K$  компонент будет  $K(N - 1)$  условий, следовательно, общее число независимых  $\mu_{ij}$  равно  $KN - N - K(N - 1) = K - N$  ( $N$  условий вытекает из постоянства состава фаз). Кроме того, независимыми являются  $T$  и  $p$ , следовательно, всего будет  $\boxed{C = K - N + 2}$  независимых условия — **правило фаз Гиббса** (число СС системы из  $K$  компонент и  $N$  фаз).

## Фазовые переходы первого рода. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса

**Скрытая теплота** — теплота, идущая в ФП1 на изменение фазового состояния вещества.

Рассмотрим бесконечно малый обратимый цикл Карно с изотермами — состояниями двухфазной системы.  $A = (V_1 - V_2)dp$ ,  $\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{(V_1 - V_2)dp}{L}$ , где  $L$  — скрытая теплота ФП1 данной массы вещества.

Т.к.  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T - dT}{T} = \frac{dT}{T}$ , получим **уравнение Клапейрона-Клаузиуса**:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_1 - V_2)}.$$

Оно связывает давление, при котором двухфазная система находится в состоянии равновесия, с температурой. Если известны  $L$ ,  $V_1$  и  $V_2$ , то можно найти  $p = p(T)$ .

## Фазовые переходы второго рода

ФП2 наблюдаются сразу во всем объеме системы и связаны с изменением ее симметрии. Точка ФП2 называется **точкой Кюри**. Т.к. он происходит сразу во всем объеме среды, не происходит выделения или поглощения скрытой теплоты.

В связи с изменением симметрии, меняется  $C_V$ , также как и термический коэффициент сжимаемости  $\beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  и теплового расширения  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ .

Вдоль кривой перехода  $S'' = S'$ ,  $V'' = V'$ , где штрихованные величины относятся к первой фазе, дважды штрихованные — ко второй, следовательно:

$$\left( \frac{\partial S''}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial S''}{\partial p} \right)_T dp = \left( \frac{\partial S'}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial S'}{\partial p} \right)_T dp;$$

$$\left( \frac{\partial V''}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V''}{\partial p} \right)_T dp = \left( \frac{\partial V'}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V'}{\partial p} \right)_T dp.$$

Тогда, т.к.  $-\left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ ,  $\Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{\Delta C_p}{T \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}$ ,  $\frac{dp}{dT} = -\frac{\Delta \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\Delta \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}$ ,

получим **Уравнения Эренфеста**:

$$\Delta \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{dp}{dT} \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \Delta C_p = -T \left( \frac{dp}{dT} \right)^2 = \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

## Теория фазовых переходов и критических явлений

Итак, ФП1 — **прерывные**, при них  $V = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_T$  и  $S = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p$  испытывают скачки. ФП2 — **непрерывные**,  $V$  и  $S$  — непрерывны, а скачки испытывают их производные второго и высших порядков:  $C_p = -T \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_p$ ,

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \right)_T, \quad \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial p} \right)_V.$$

Примеры ФП1: плавление, кристаллизация, кипение, сублимация.

**Критическими** называют ФП2, сопровождающихся бесконечным ростом производных  $\Phi$ .

Менделеев обнаружил, что при **температуре абсолютного кипения** жидкость и пар становятся тождественными (т.е. у жидкости исчезает поверхностное натяжение), такое состояние является критическим.

Гиббс и Столетов сформулировали основные положения классической ТД критических явлений. По Гиббсу–Столетову критическая фаза является предельным случаем двухфазного равновесия, когда обе фазы становятся тождественными. При этом  $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ ;  $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p} = 0$ ;  $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = 0$ ;

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T = 0.$$

Для однокомпонентной системы в критическом состоянии  $C = 0$ , т.е. это состояние возможно лишь при определенных значениях  $T$ ,  $p$  и  $V$ .

Если же на систему действует еще какая-либо сила (например, электромагнитное поле), то критической является линия  $C = 1$ .

## 28 Явления переноса

Если система находится в неравновесном состоянии, то, будучи предоставленной сама себе, через **время релаксации** она придет в равновесное состояние. Такие процессы называются **релаксационными**. К ним относятся: теплопроводность, диффузия, вязкость.

### Уравнение переноса

Пусть  $G$  — некоторое молекулярное свойство в расчете на одну молекулу. Пусть  $OX$  — ось, направленная вдоль градиента  $G$ . Среднее расстояние, пробегаемое молекулами, пересекающими перпендикулярную  $OX$  площадку  $dS$ , после последнего столкновения, равно  $\frac{2}{3}\langle l \rangle$ , где  $\langle l \rangle$  — средняя длина сво-

бодного пробега молекул. Тогда  $G(x \pm \frac{2}{3}\langle l \rangle) = G(x) \pm \frac{2}{3}\langle l \rangle \frac{\partial G(x)}{\partial x}$ , т.к. величина  $\langle l \rangle$  мала.

Поток числа молекул в направлении  $OX$  равен  $n_0\langle v \rangle/4$ , следовательно, поток  $G$  составит

$$I_G^{(-)} = -\frac{1}{4}n_0\langle v \rangle \left\{ G(x) + \frac{2}{3}\langle l \rangle \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right\},$$

$$I_G^{(+)} = \frac{1}{4}n_0\langle v \rangle \left\{ G(x) - \frac{2}{3}\langle l \rangle \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right\}.$$

Тогда получим **основное уравнение переноса количества  $G$** :

$$I_G = I_G^{(+)} + I_G^{(-)} = -\frac{1}{3}n_0\langle v \rangle \langle l \rangle \frac{\partial G}{\partial x}.$$

### Диффузия. Закон Фика

Пусть  $n_1$  – концентрация первого сорта молекул,  $n_0$  – равновесная концентрация всех молекул. Тогда  $G = n_1/n_0$ , следовательно, уравнение переноса вещества:

$$I_{n_1} = -\frac{1}{3}n_0\langle v \rangle \langle l \rangle \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_1}{n_0} \right) = -D \frac{\partial n_1}{\partial x},$$

где  $D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle$  – **коэффициент диффузии**. Уравнение  $I_{n_1} = -D \frac{\partial n_1}{\partial x}$  выражает **закон Фика**.

При  $T = \text{const}$ ,  $\langle v \rangle = \text{const}$ ,  $\langle l \rangle \propto 1/p$ ,  $\Rightarrow D \propto 1/p$ . При  $p = \text{const}$ ,  $\langle l \rangle \propto T$ ,  $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$ ,  $\Rightarrow D \propto T^{3/2}$ .

### Внутреннее трение. Закон Ньютона–Стокса

Вязкость обуславливается переносом импульса молекул поперек направления движения слоев газа. Слой, движущийся быстрее, тормозится, а медленный слой – ускоряется. Сила трения, отнесенная к площади трущихся поверхностей, равна потоку импульса упорядоченного движения в перпендикулярном скорости направлении. Следовательно,  $G = mu$ , где  $u$  – скорость слоя. Тогда

$$I_{mu} = -\frac{1}{3}n_0\langle v \rangle \langle l \rangle m \frac{\partial u}{\partial x},$$

получили закон Ньютона–Стокса:  $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $\eta = \frac{1}{3} m n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$  – динамическая вязкость.

### Теплопроводность. Закон Фурье

Из теоремы о равномерном распределении энергии следует, что  $G = \frac{i}{2} k T = \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{C_V}{N_A} T$ ,  $\Rightarrow$

$$I_q = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{\partial T}{\partial x},$$

получили закон Фурье:  $I_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ , где  $\lambda = \frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle C_V / N_A = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_V$  – коэффициент теплопроводности,  $c_V = C_V / (N_A m)$ .

Т.к.  $\lambda$  определяется, в основном, средней скоростью молекул, то легкие газы обладают большей теплопроводностью. Т.к.  $n_0 \langle l \rangle = 1/\sigma$ ,  $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$ , то  $\lambda \propto \sqrt{T}$ ,  $\Rightarrow$  теплопроводность не зависит от давления газа.

### Связь коэффициентов переноса с молекулярно-кинетическими характеристиками газов

Выражая коэффициенты переноса через общие величины, получим:

$$\lambda = \frac{\eta C_V}{m N_A}, \quad D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{c_V \rho}.$$

Наличие такой связи обусловлено однородностью физической природы процессов переноса.

### Теорема Лиувилля и уравнение Лиувилля для классической функции распределения

Рассмотрим элемент объема фазового пространства (ФП)  $d\Gamma = \prod_{i=1}^N dq_i dp_i$ , где  $N$  – число частиц системы. Пусть  $f$  – число СС каждой частицы.

На интервалы  $(q_i, q_i + dq_i)$  и  $(p_i, p_i + dp_i)$  приходится  $d\Omega = d\Gamma / h^{Nf}$  квантовых состояний, где  $h^{Nf}$  – фазовый объем каждого квантового состояния.

**Метод Гиббса** позволяет исследовать поведение произвольных макроскопических систем, частицы которых взаимодействуют друг с другом сколь угодно сильно.

Пусть  $\rho(p, q)$  – плотность вероятности системы, тогда  $dW(p, q) = \rho(p, q) d\Gamma$  – вероятность пребывания фазовой точки в элементе  $d\Gamma$ . Очевидно, что  $\int \rho d\Gamma = 1$ . Со временем  $\rho$  может измениться, поэтому следует писать  $\rho = \rho(p, q, t)$ .

Т.к. изображающие точки ФП не рождаются и не исчезают, получим **уравнение непрерывности**:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho(p, q, t) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Gamma = \oint \rho \vec{u} d\vec{\sigma},$$

т.е. убыль числа точек в  $\Gamma$  равна их потоку через границу ФП.  $\vec{u}$  является вектором  $2fN$ -мерной скорости изображающих точек с проекциями  $\dot{q}_i$  и  $\dot{p}_k$ ,  $d\vec{\sigma}$  – направляющий элемент поверхности, ограничивающей  $\Gamma$ .

Пользуясь теоремой Гаусса, получим:

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) \right] d\Gamma = 0,$$

где  $\nabla$  –  $2fN$ -мерный градиент с проекциями  $\frac{\partial}{\partial q_i}$  и  $\frac{\partial}{\partial p_j}$ .

$$\begin{aligned} \nabla(\rho \vec{u}) &= \sum_{k=1}^{fN} \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] = \\ &= \rho \sum_{k=1}^{fN} \left[ \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right] + \sum_{k=1}^{fN} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right]. \end{aligned}$$

Из уравнений движения в форме Гамильтониана  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ ,  $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$  следует, что первое слагаемое после знака равенства в предыдущем уравнении равно нулю. Второе слагаемое равно  $\vec{u} \nabla \rho$ . Получили **уравнение Лиувилля**:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho = 0.}$$

Т.к.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho = \frac{d\rho}{dt}$ , то можно записать:  $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$ , т.е. функция распределения  $\rho(p, q, t)$  остается постоянной вдоль динамических траекторий в  $\Gamma$ -пространстве (теорема Лиувилля).

В статической физике системы равновесны, следовательно,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \Rightarrow \vec{u} \nabla \rho = 0$ , т.е. градиент функции распределения перпендикулярен динамической траектории (вдоль траектории функция распределения не меняется).

## Вакуум. Явления переноса в ультраразреженных газах

В условиях вакуума столкновения между молекулами практически отсутствуют, следовательно, правильнее будет говорить не о *теплопроводности*, а о *теплопередаче* (т.е. отсутствует понятие градиента температуры). Интенсивность теплопередачи пропорциональна давлению. Этот эффект используется в сосудах Дюара, имеющих двухслойные стенки, между которыми находится вакуум.

Интенсивность диффузии пропорциональна средней групповой скорости движения молекул, которая значительно выше в вакууме, чем в плотных газах. Время выравнивания концентраций двух газов зависит только от объема сосуда.

Две твердых поверхности, между которыми находится слой вакуума, испытывают трение за счет того, что молекулы газа, ударяясь об одну из плоскостей, передают некоторый импульс другой. Т.о., в вакууме отсутствует внутреннее трение в том смысле, в каком оно существует при более высоком давлении, но имеется взаимное трение движущихся друг относительно друга поверхностей.

## 29 Жидкое и плазменное состояния вещества

### Жидкости

**Жидкость** — вещество в конденсированном состоянии, промежуточном между твердым и газообразным. Область существования жидкостей ограничена со стороны низких температур фазовым переходом в твердое состояние (**кристаллизация**), а со стороны высоких — в газообразное (**испарение**). Для каждого вещества существует критическая температура, выше которой жидкость не может сосуществовать со своим насыщенным паром. Большинство веществ имеют одну жидкую фазу, однако у некоторых (квантовые жидкости  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ , жидкие кристаллы) существует две жидкие фазы.

Можно выделить следующие группы жидкостей:

- атомарные жидкости, связанные Ван-дер-Ваальсовыми силами;
- жидкости из двухатомных молекул, содержащих одинаковые атомы, обладающие квадрупольным электрическим моментом;
- жидкие непереходные металлы, в которых частицы связаны кулоновскими силами;
- жидкости из полярных молекул, связанных диполь-дипольным взаимодействием;
- ассоциированные жидкости или жидкости с водородными связями;
- жидкости из больших молекул, для которых существенны внутренние степени свободы.

Фазовое состояние системы определяется физическими условиями, в которых она находится. Главным образом это температура и давление. Характерным параметром является функция  $\varepsilon = \varepsilon(T, p)$  — отношение средней энергии взаимодействия молекул к их средней кинетической энергии. Для большинства твердых тел  $\varepsilon \gg 1$ , в газах  $\varepsilon \ll 1$ , в жидкостях же  $\varepsilon \approx 1$ , что и определяет их особенности и промежуточный характер теплового движения частиц.

Структуру жидкостей изучают при помощи методов рентгеноструктурного анализа, электронографии и нейтронографии.

Благодаря тому, что молекулы в жидкости непрерывно и в большом числе совершают переходы из одного положения равновесия в другое, жидкости обладают текучестью, под действием внешней силы вероятность скачков в направлении действия силы увеличивается, и жидкость начинает перемещаться. Под действием периодической внешней силы с периодом порядка времени скачка проявляются упругие свойства жидкостей. Обычно упругие деформации в жидкостях происходят адиабатически (за исключением жидких металлов).

Равновесные функции жидкости полностью описываются набором функций распределения  $F_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_s)$ , описывающих плотность вероятности нахождения частиц в заданных точках. Число частиц в сферическом слое толщины  $dr$  на расстоянии  $r$  от произвольно выбранной частицы равно

$$dN = 4\pi n G(r) r^2 dr,$$

где  $G(r)$  – радиальная функция распределения (частный случай  $F_s$  при  $s = 2$ ),  $n$  – концентрация частиц. В случае парного и центрального взаимодействия между частицами физические свойства жидкости выражаются только через  $G(r)$ , например, давление:

$$p(n, T) = nkT - \frac{2\pi n^2}{3} \int_0^x \Phi'(\vec{r}) G(\vec{r}; n, T) r^3 dr,$$

где  $\Phi(\vec{r})$  – **потенциал парного взаимодействия**. При наличии в жидкости многочастичного взаимодействия термодинамические функции будут содержать еще и старшие функции распределения для  $s > 2$ .

Функции многочастичного взаимодействия удовлетворяют системе уравнений Боголюбова, сложность их решения в том, что эти уравнения являются зацепляющимися, т.е. уравнение для  $F_s$  содержит  $F_{s+1}$ . Наиболее распространенным приближением для трехчастичного взаимодействия является **приближение Кирквуда**:

$$F_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = G(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) G(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) G(\vec{r}_3 - \vec{r}_1).$$

## Поверхностные явления

**Поверхностными явлениями** называют явления, связанные с существованием межфазных границ. В области контакта двух фаз под влиянием их молекулярно-силовых полей происходит образование поверхностного слоя, сопровождающееся адсорбцией, возникновением поверхностной энергии, поверхностного натяжения и других специфических свойств.

Закономерности поверхностных явлений описываются **законом Лапласа**:

$$p_1 - p_2 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны в данной точке; и уравнением Юнга, а также **обобщенным уравнением адсорбции Гиббса**:

$$d\sigma = -\vec{s}dT + (\hat{\gamma} - \sigma\hat{I}) \cdot d\hat{\varepsilon} - \sum_i \Gamma_i d\mu_i,$$

где  $\sigma$  – работа образования единицы поверхности путем разрезания,  $\vec{s}$  – удельная поверхностная энтропия,  $\hat{\Gamma}$  – тензор поверхностных натяжений,  $\hat{I}$  – единичный тензор,  $\hat{\mu}_i$  – химические потенциалы молекул,  $\Gamma_i$  – их адсорбции; суммирование производится по всем компонентам, для которых возможно равновесие между объемной фазой и поверхностной фазой. Для жидкостей  $\sigma$  – поверхностное натяжение, а деформационный член отсутствует.

Существенное явление поверхностные явления оказывают на свойства макросистем за счет увеличения поверхности, ее искривления и контакта разнородных поверхностей. Искривление поверхности порождает капиллярные явления. В гетерогенной системе с искривленными поверхностями уже не действует *правило фаз Гиббса*, в такой системе число степеней свободы на единицу меньше числа компонент и не зависит от числа фаз.

К поверхностным явлениям относятся: когезия, адгезия, смачивание, смазочное и моющее действие, трение, пропитка пористых тел. Важную роль поверхностные явления играют в фазовых процессах: на стадии зарождения фаз они создают энергетический барьер, определяющий кинетику процесса и возможность существования метастабильных состояний.

При расчете формы поверхности жидкости в капиллярах важной величиной является **капиллярная постоянная**:  $a = \sqrt{2\sigma/(g\rho)}$ . Сумма обратных радиусов кривизны слабо изогнутой поверхности с формой  $\zeta = z(x, y)$  определяется формулой:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся по поверхности жидкости в капилляре имеет вид:  $\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3$ . В случае, когда  $k \ll \sqrt{g\rho/\alpha}$ , капиллярностью можно пренебречь, и волна распространяется только под действием гравитации. В обратном случае можно пренебречь силой тяжести, тогда  $\omega^2 = \alpha k^3/\rho$ , такие волны называют **капиллярными**.

Уравнение стоячей капиллярной волны получается путем интегрирования уравнения Лапласа методом разделения переменных. Формула для частоты стоячих капиллярных волн получена Рэлеем:

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho R^3}l(l-1)(l+2).$$

Из уравнения видно, что каждому числу  $l$  соответствует  $2l + 1$  различных функций, т.е. в системе наблюдается  $2l + 1$ -кратное вырождение.

## Кинетическое уравнение Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана (КуБ) — интегродифференциальное уравнение, которому удовлетворяют неравновесные одночастичные функции распределения системы из большого числа частиц (например, функция распределения молекулы по скоростям).

КуБ представляет собой уравнение баланса числа частиц в элементе фазового объема  $d\vec{v} d\vec{r}$  и выражает тот факт, что изменение функции распределения частиц,  $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ , со временем происходит вследствие движения частиц под действием внешних сил и столкновений между ними.

Для газа, состоящего из частиц одного сорта, КуБ имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{m} \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}},$$

где  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$  – сила, действующая на частицу (может зависеть и от скорости),  $(\delta f / \delta t)_{\text{ст}}$  – изменение функции распределения вследствие столкновений.

КуБ учитывает только парные столкновения молекул, оно справедливо при условии, что длина свободного пробега молекул значительно больше линейных размеров области, в которой происходят столкновения. Если система находится в статистическом равновесии, интеграл столкновений обращается в нуль, и решением уравнения является распределение Максвелла.

При более строгом подходе для построения КуБ исходят из уравнения Ливилля, из которого получают цепочку уравнений Боголюбова. Решение КуБ позволяет получить макроскопические уравнения для процессов переноса.

КуБ можно применять и для квантовых газов. В этом случае вид функции распределения определяется видом статистики, которой подчиняется данный газ.

## Понятие об H–теореме

H–теорема Больцмана — одно из важных положений в кинетической теории газов, согласно которому *для изолированной системы в неравновесном состоянии существует H–функция Больцмана, зависящая от функции распределения частиц по скоростям и координатам и монотонно убывающая со временем.* H–функция равна энтропии газа, деленной на постоянную Больцмана, следовательно, H–теорема выражает закон возрастания энтропии для изолированной системы.

Для газа H–функция равна:

$$H = \int h(\vec{r}, t) d\vec{r} = \iint f(\vec{v}, \vec{r}, t) \ln f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v} d\vec{r},$$

где  $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$  – функция распределения частиц, удовлетворяющая КуБ,  $h(\vec{r}, t)$  – пространственная плотность H–функции (локальная плотность энтропии с обратным знаком). Скорость изменения H–функции со временем равна

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} d\vec{r}.$$

Согласно H–теореме, для изолированной системы  $\delta H/\delta t \leq 0$ , что следует из выражения для скорости изменения H–функции, если в него подставить  $f$  из КуБ и симметризовать выражение относительно функций распределения сталкивающихся частиц при прямом и обратном соударении. В общем случае для вывода H–теоремы необходимо использовать принцип детального равновесия.

В пространственно-неоднородных ограниченных системах необходимы ГУ для функции распределения на границе системы. В этом случае справедливо *уравнение баланса энтропии*:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S} = G \leq 0,$$

где  $\vec{S}$  – плотность потока энтропии,  $G$  – **локальное производство** энтропии с обратным знаком. Таким образом, H–теорема есть следствие положительности производства энтропии в неравновесной термодинамике (в изолированной же системе суммарный поток энтропии через границу равен нулю).

Убывание H–функции (рост энтропии) соответствует возрастанию хаоса в системе, что связано с неустойчивостью фазовых траекторий многих механических систем относительно изменения НУ: малые изменения НУ приводят к большим отклонениям фазовых траекторий. Для макроскопических систем в обычных условиях этот эффект не наблюдается, т.к. макроскопическое наблюдение подразумевает некоторое сглаживание (определяется значительно меньшее число параметров системы, чем число механических НУ).

## Плазма

**Плазма** — частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности разноименных зарядов практически одинаковы. **Степенью ионизации**,  $\alpha$ , плазмы называют отношение числа ионизованных атомов к их полному числу в единице объема плазмы. В условиях термодинамического равновесия она определяется **формулой Саха**:  $\alpha = (1 + K)^{-1/2}$ ,  $K = N_\lambda \exp(I/kT)$ , где  $I$  – энергия ионизации,  $N_\lambda = n\lambda_e^3$  – число частиц всех сортов в кубе с ребром,

равным тепловой длине волны де Бройля для электронов:  $\lambda_e = \hbar/\sqrt{2\pi m_e kT}$ . Плазму с температурой менее  $10^5$  К называют *низкотемпературной*.

К важнейшим свойствам плазмы относится *квазинейтральность*. Она соблюдается, если линейные размеры занимаемой плазмой области значительно превосходят **дебаевский радиус экранирования**:

$$r_D = \sqrt{\frac{kT_e T_i}{4\pi q_e q_i (n_e T_e + n_i T_i)}}$$

где  $q_e$  и  $q_i$  – заряд электронов и ионов,  $n_e$  и  $n_i$  – электронная и ионная плотности (формула записана в системе СГС). В **идеальной** плазме потенциальная энергия взаимодействия частиц мала по сравнению с их тепловой энергией.

Частицы плазмы помимо хаотического теплового движения могут участвовать в упорядоченных коллективных процессах, из которых наиболее характерны продольные колебания пространственного заряда – **ленгмюровские волны**. Их угловая частота,  $\omega = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$ , называется **плазменной частотой**.

В МП на частицы плазмы действует сила Лоренца, в результате которой заряды вращаются с циклотронными частотами  $\omega_B = eB/mc$  по ларморовским спиральям радиуса  $\rho_B = v_{\perp}/\omega_B$ . При этом электроны вращаются по часовой стрелке (если смотреть в направлении движения), а ионы – против. Создаваемые зарядами круговые токи уменьшают внешнее МП. Магнитные моменты круговых токов равны  $\mu = mv^2/2B$ . В неоднородном поле плазма подобно диамагнетику выталкивается в область более слабого поля, из-за чего плазма становится неустойчивой в неоднородных полях.

Взаимные столкновения частиц плазмы описываются **эффе́ктивными сечениями**,  $\sigma$ , характеризующими площадь мишени, в которую нужно «попасть», чтобы произошло столкновение. Например, электрон, пролетающий мимо иона на расстоянии **прицельного параметра**,  $\rho$ , отклоняется силой кулоновского притяжения на угол  $\theta$ , примерно равный отношению потенциальной энергии к кинетической,  $\theta \approx 2\rho_{\perp}/\rho$ , где  $\rho_{\perp}$  – прицельное расстояние, для которого угол отклонения составляет  $90^\circ$ . Удобными характеристиками являются **длина свободного пробега**,  $l = 1/(n\sigma)$ ; частота столкновений,

$\nu = nv\sigma$ ; время между столкновениями,  $\tau = 1/\nu$ .

Электропроводность полностью ионизованной плазмы не зависит от ее плотности и пропорциональна  $T^{3/2}$ . Высокотемпературную плазму можно приближенно рассматривать как сверхпроводник, полагая  $\sigma \rightarrow \infty$ . Это явление приводит к тому, что МП как бы «вмораживается» в плазму, что, в свою очередь, может привести к самогенерации МП при хаотическом турбулентном движении плазмы за счет увеличения длины магнитных силовых линий.

Свойства плазмы сделали возможной жизнь на Земле: магнитное поле Земли является радиационной ловушкой для излучаемой Солнцем плазмы, оно удерживает захваченные им частицы в радиационных поясах Земли. В термоядерных исследованиях используется закрытый тип ловушки (ТОКА-МАК).

При описании плазмы уравнениями магнитной гидродинамики,

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}; \quad \rho \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}; \quad p \propto \rho^\gamma,$$

учитывается, что **магнитное давление**  $p_{\text{маг}} = B^2/8\pi$  может уравновешивать газодинамическое давление  $p_{\text{газ}}$ . В состоянии равновесия при  $v = 0$  имеем:  $\vec{j} \times \vec{B} = c\nabla p$ , т.е. магнитные силовые линии и линии тока располагаются на эквипотенциальных поверхностях. При расчетах равновесия тороидальных систем (аксиальная симметрия) используется **уравнение Грэда–Шафранова**:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = F_1 + r^2 F_2,$$

где функции  $F_1$  и  $F_2$  зависят лишь от потока  $\Phi$ .

Степень вмороженности МП характеризуется **магнитным числом Рейнольдса**:  $Re_M = 4\pi Lv\sigma c^{-2}$ , где  $L$  – характерный для плазмы размер,  $\sigma$  – электропроводность плазмы.

Наиболее детальным методом описания плазмы является кинетический метод, основанный на использовании функции распределения частиц по координатам и импульсам. В состоянии ТД равновесия эта функция имеет вид

распределения Максвелла, в общем случае ее выводят из кинетического уравнения Больцмана. В случае, когда столкновениями в плазме можно пренебречь (быстрое движение плазмы), кинетическое уравнение переходит в бесстолкновительное уравнение Власова с самосогласованными ЭП и МП.

В случае, когда в плазме возбуждены волны, необходимо учитывать взаимодействие частиц с волнами, которые, по аналогии с квантовой электродинамикой, можно изображать графически, подобно диаграммам Феймана. Ввиду большого количества взаимодействий в плазме, она может излучать в довольно широкой спектральной области. Спектр низкотемпературной плазмы является полосатым, за счет фоторекомбинации заряженных частиц. В высокотемпературной плазме возникают также тормозное излучение со сплошным рентгеновским спектром и магнитотронное излучение на гармониках циклотронной частоты.

# Электричество и магнетизм

## 30 Электростатическое поле

### Закон Кулона

Экспериментально Кулон установил, что сила взаимодействия зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, а силы взаимодействия заряда  $A$  с зарядами  $B$  и  $C$  пропорциональны зарядам:  $F_{AB}/F_{AC} = q_B/q_C$ . Таким образом, **закон Кулона**:

$$F = f \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \vec{F} = f \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}.$$

В СГСЭ  $f = 1$ , в СИ  $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

### Потенциал. Вектор напряженности электрического поля

**Напряженность** электрического поля (ЭП)  $E$  — сила, действующая на единичный положительный пробный заряд со стороны другого заряда. Т.е. *напряженность — силовая характеристика поля*.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Работа по перемещению заряда из точки (1) в точку (2) равна разности потенциальных энергий заряда в этих точках:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}(r) d\vec{l} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \vec{r} \frac{d\vec{r}}{r^3} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = W_{p1} - W_{p2}.$$

Потенциальная энергия  $W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}$ . Полагая  $\text{const} = 0$ , получим:  $W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$ . **Потенциал** — потенциальная энергия единичного положительного заряда в ЭП:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Потенциал численно равен работе, совершенной по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Потенциал связан с напряженностью посредством оператора градиента:

$$\vec{F} = -\text{grad } W_p, \Rightarrow q\vec{E} = -\text{grad } W_p, \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\text{grad } \varphi}.$$

Напряженность ЭП удовлетворяет **принципу суперпозиции электрического поля**:  $\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n$ .

### Поток напряженности электрического поля

**Индукция** (смещение) ЭП,  $D$  — еще одна характеристика ЭП. Она равна  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$ . В СГСЭ индукция и напряженность ЭП в вакууме равны.

**Поток** векторной величины  $\vec{a}$  есть величина, равная  $\Phi_{\vec{a}} = \oint_S \vec{a} d\vec{S}$ . Очевидно, что  $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \Phi_D$ .

Вычислим поток электрической индукции через замкнутую сферическую поверхность радиуса  $R$  вокруг точечного положительного заряда  $q$ :

$$\Phi_D = \oint_S D dS = 4\pi R^2 D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = q.$$

Таким образом, поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен заряду, заключенному внутри этой поверхности. Это утверждение справедливо и для поверхностей любой формы и называется **теоремой**

**Остроградского–Гаусса для электростатического поля**:  $\boxed{\Phi_D = \sum q_i}$

Т.к.  $\oint \vec{a} d\vec{S} = \int \text{div } \vec{a} dV$ , поток индукции равен  $\Phi_D = \int_V \text{div } \vec{D} dV$ . Сумма зарядов  $\sum q_i = \int_V \rho dV$ , где  $\rho$  — **объемная плотность заряда**. Для любого объема  $V$  справедливо соотношение  $\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho dV$ . Отсюда получим **уравнение Пуассона**:

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}, \quad \text{или} \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}.$$

Для электрических зарядов справедлива **теорема Ирншоу**: *система зарядов, расположенных в пространстве на любом расстоянии друг от друга, не может находиться в покое в отсутствии внешних сил*. Доказательство этой теоремы очевидно, т.к. между любыми зарядами действуют кулоновские силы притяжения или отталкивания, т.е. в отсутствии внешних сил заряды всегда будут двигаться.

## Электрический диполь. Поле диполя

**Диполь** электрический — система, состоящая из положительного и отрицательного зарядов  $q$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга. Характеристика диполя — **дипольный момент**:  $\vec{p} = ql\vec{l}$  ( $\vec{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному). В электрическом поле на диполь действует момент силы  $\vec{M} = ql\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$ .

Энергия диполя  $W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = -pE \cos \alpha = -\vec{p}\vec{E}$ , где  $\alpha$  — угол между  $p$  и  $E$ .

В неоднородном поле на диполь помимо момента сил действует сила, смещающая его из положения равновесия:  $F = qE + qE' = q(E + l \frac{dE}{dx} - E) = p \frac{dE}{dx}$ , таким образом,  $\vec{F} = p \text{grad } E$ . В однородном поле  $\text{grad } E = 0$ , следовательно, и  $F = 0$ .

Найдем напряженность и потенциал поля диполя.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = \frac{q l \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}.$$

Т.к.  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , получим:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

## Квадрупольный момент

Пусть заряд  $q$  распределен в некоторой области пространства. Поле вне области распределения заряда удобно представить в виде бесконечного ряда с

быстро убывающими членами:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|;$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + z' \frac{\partial}{\partial z'} \right)^n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \vec{r}' \vec{r} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\substack{\mathbb{N}=\overline{x,y,z} \\ \mathbb{J}=\overline{x,y,z}}} (3\mathbb{N}'\mathbb{J}' - r'^2 \delta_{\mathbb{N},\mathbb{J}}) \mathbb{N}\mathbb{J} + \dots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{pr}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbb{N}=\overline{x,y,z} \\ \mathbb{J}=\overline{x,y,z}}} Q_{\mathbb{N}\mathbb{J}} \frac{\mathbb{N}\mathbb{J}}{r^5} + \dots \right).$$

Благодаря быстрой сходимости этого ряда, обычно ограничиваются первыми несколькими членами:  $q = \int_V \rho(r') dV'$  – **полный заряд**;  $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(r') dV'$  – **дипольный момент**;  $Q_{\mathbb{N}\mathbb{J}} = \int_V (3\mathbb{N}'\mathbb{J}' - r'^2 \delta_{\mathbb{N},\mathbb{J}}) \rho(r') dV'$  – **квадрупольный момент**.

## 31 Потенциальность электрического поля

### Калибровочная инвариантность

К.и. имеет место в тех случаях, когда не все поля, участвующие в формулировке теории, отвечают наблюдаемым величинам. С помощью к.и. строится калибровочное поле. Например, уровни энергии и сечения различных процессов, вычисленные при использовании к.и., и с помощью исходных полей совпадают.

К.и. можно рассматривать, как переход к другому базису в пространстве–времени. К.и. используется для описания взаимодействий фотонных и электрон–позитронных полей. К.и. означает, что существует возможность независимого выбора «направлений» заряда в различных точках

пространства–времени. Чтобы этот выбор был однозначным, вводятся граничные условия, задающие начальное (в момент времени равным 0) и граничное (на бесконечности) состояние системы (поля, отдельных его частей).

На часть компонент калибровочного поля, которые меняются произвольным образом при калибровочных преобразованиях, накладывают дополнительное условие — условие калибровки. Наиболее используемые условия калибровки: кулоновская калибровка,  $\partial_i A_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 2, 3, \dots}$  и лоренцова калибровка.

К.и. позволяет на основе единого принципа объяснить всю иерархию существующих в природе взаимодействий.

## Уравнение Лапласа

**Общая задача электростатики:** имеется система зарядов и известны их потенциалы, требуется определить потенциал в произвольной точке пространства. Эта задача решается при помощи уравнения Лапласа.

Электрическое поле является потенциальным, т.е. циркуляция ЭП в любой его точке равна нулю:

$$\text{rot } \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Дифференциальной формой уравнения Остроградского–Гаусса является уравнение Пуассона  $\text{div } E = \rho/\varepsilon_0$ . Так как  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , то  $\text{div grad } \varphi = -\rho/\varepsilon_0$ . А т.к.  $\text{div grad } \varphi = \Delta\varphi$ , где  $\Delta$  — **оператор Лапласа** (лапласиан), получим **уравнение Лапласа:**  $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ . Если в системе отсутствуют свободные заряды, то  $\Delta\varphi = 0$ .

## Роль граничных условий

Рассмотрим некоторую поверхность с распределенным по ней зарядом. Электрическое поле по разные стороны поверхности направлено в противоположных направлениях, т.е. напряженность поля испытывает скачек у рассматриваемой поверхности.

Уравнения, связывающие напряженность ЭП по разные стороны поверхности, называются **граничными условиями**.  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \Rightarrow \Phi_E = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = q/\varepsilon_0 = S(E_{2n} - E_{1n})$ . На боковой поверхности  $\Phi = 0$ , т.к. ее площадь исчезающе мала. Следовательно, **граничные условия для нормальной составляющей ЭП  $E_n$** :

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}, \quad \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma},$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда.

$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} = \oint_{L1} E d\vec{l} + \oint_{L2} E d\vec{l} = 0$ , следовательно,  $\oint_{L1} E d\vec{l} = -\oint_{L2} E d\vec{l}$ , а т.к.  $\oint_L E d\vec{l} = -E_\tau L$ , получим **граничные условия для касательной составляющей ЭП  $E_\tau$** :

$$\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}, \quad \boxed{D_{2\tau} = D_{1\tau}}.$$

## Энергия системы зарядов

Для одного заряда  $W = \frac{1}{2}\varphi q$ , для системы  $N$  зарядов  $W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$ . Сила электрического тока:  $I = \frac{dq}{dt}$ , плотность тока:  $j = \frac{dI}{dS}$ .  $\oint_S j dS = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \Rightarrow \operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Т.к.  $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} E$ , получим:  $\boxed{j = -\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}$ .

Мощность ЭП:  $P = \frac{dA}{dt} = \frac{q\vec{E} d\vec{r}}{dt} = q\vec{E}\vec{v} = \int_V \vec{E}\vec{j} dV = -\varepsilon_0 \int_V E \frac{\partial E}{\partial t} dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V E^2 dV$ . Тогда энергия ЭП  $\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV}$ .

Плотность энергии ЭП:  $w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ .

## 32 Проводники в электростатическом поле

### Напряженность электрического поля у поверхности и внутри проводника

Если заряды проводника находятся в равновесии, то напряженность ЭП внутри него должна быть равна нулю, иначе под ее влиянием заряды пришли бы в движение.

Из уравнения Пуассона  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  следует, что внутри проводника заряды отсутствуют:  $\rho^{(i)} = 0$ , т.е. они расположены только на его поверхности. Из условия симметрии следует, что  $\vec{E} = \vec{E}_n$ , а поверхность проводника является **эквипотенциальной** (на ней  $\operatorname{grad} \varphi = 0$ ).

Если проводник — бесконечная плоскость, то по теореме Гаусса  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ , где  $\sigma$  — **поверхностная плотность заряда**. На поверхности проводника  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . Т.к. весь заряд расположен по поверхности проводника равномерно,  $\sigma = q/S$ .

Если из проводника вынуть внутреннюю часть, заряды все равно будут расположены по поверхности, внутри  $E = 0$ .

Если замкнутый полый проводник внести во внешнее ЭП, то на нем появятся индуцированные заряды, сосредоточенные на поверхности, напряженность ЭП внутри проводника так и останется равной нулю. Т.е. такой проводник является экраном от внешних электрических полей (**электростатическая защита**). Для защиты чувствительных приборов их помещают в замкнутые металлические ящики, которые заземляют.

Однако, следует учитывать, что замкнутая проводящая поверхность не экранирует внешнюю среду от зарядов, размещенных внутри нее.

## Переменные поля и токи в массивных проводниках. Скин-эффект

В случае постоянного тока его плотность,  $j$ , одинакова в любой точке проводника, однако переменный ток имеет бóльшую плотность у поверхности и меньшую в центре проводника — **скин-эффект**.

Согласно **уравнениям Максвелла**,  $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  и  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

**Дифференциальный закон Ома:**  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . Следовательно,  $-\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , т.к.  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$ , получим:  $\Delta \vec{E} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $\Delta \vec{H} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ .

Пусть ток течет вдоль оси  $OX$ . Тогда  $j = j_x$ ,  $E = E_x(y, t)$ ,  $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$ . Если  $\omega$  — частота переменного тока, то  $E_x = E_{x0} \exp(i\omega t)$ , следовательно,  $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 2ip^2 E_x$ ,  $p^2 = \mu\gamma\omega/2$ ,  $\Rightarrow E_{x0} = A_0 \exp(kx) + B_0 \exp(-kx)$ ,  $k^2 = 2ip^2$ ,  $k = p(1+i)$ . Т.о.,  $E_{x0} = A_0 e^{py} e^{ipy} + B_0 e^{-py} e^{-ipy}$ , т.к.  $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{py} = \infty$ , то  $A_0 = 0$ ,  $E_x = B e^{-py} e^{i(\omega t - py)}$  или  $E_x = B e^{-py} \cos(\omega t - py)$ , т.е.  $j_x(y) = e^{-py} j_0 \cos(\omega t - py)$ .

На расстоянии  $\Delta = 1/p$  от поверхности проводника плотность тока в  $e$  раз меньше, чем на поверхности.  $\Delta = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}$ . Таким образом, высокочастотный переменный ток «вытесняется» на поверхность проводника. При наличии сильного скин-эффекта внутри проводника отсутствует и МП.

Скин-эффект позволяет собирать линии СВЧ из полых труб (волноводов), покрытых тонким слоем серебра.

## Связь заряда и потенциала. Емкость. Конденсаторы

Для точечного заряда  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , для системы зарядов  $\varphi = \sum \varphi_i$ , следовательно, для протяженных тел

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Очевидно, что  $\varphi \propto q$ :  $q = C\varphi$ , где  $C$  – электрическая емкость тела. Для одиночного заряда  $C = q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 r$ . Если заряд расположен в какой-либо среде, то  $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ , где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды.

**Конденсатор** – система двух одинаково и противоположно заряженных тел.

Плоский конденсатор.  $\varphi = \int_0^d E dx = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \int_0^d dx = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0}$ , где  $d$  – расстояние

между пластинами конденсатора. Следовательно,  $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}$

Шаровой конденсатор.  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ , где  $a$  и  $b$  – внутренний и внешний радиус конденсатора соответственно.  $C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{1/a - 1/b}$ . В случае, когда  $b - a \ll$

$b$ ,  $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}$ .

Цилиндрический конденсатор.  $\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$ ,  $C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(b/a)}$ . При  $d = b -$

$a \ll b$ ,  $\ln(b/a) \approx d/a$ . Тогда  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ , где  $S$  – площадь единицы длины конденсатора.

Т.о., в случае малого расстояния между обкладками конденсатора, его емкость  $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$  не зависит от формы конденсатора.

Для системы  $N$  проводников  $q_i = \sum_{k=1}^N C_{ik} \varphi_k$ , где  $C_{ik}$  – взаимная емкость  $i$ -го и  $j$ -го проводников.

Энергия заряженного конденсатора.  $W = \int_0^q \varphi dq = q^2/C$ , или  $W = \int_0^U C \varphi d\varphi = CU^2/2 = qU/2$ , где  $U$  – напряжение на обкладках конденсатора.

### 33 Диэлектрики в электрическом поле

#### Вектор поляризации. Свободные и связанные заряды

На нейтральных диэлектриках в ЭП появляются поляризационные заряды за счет смещения электронных оболочек молекул или их разворота (по-

ляризация). Материалы приобретают электрический момент  $p = ql$ . **Вектор поляризации** — электрический момент единицы объема:  $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$ , или  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ .

Для изотропных диэлектриков  $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ , где  $\kappa$  — **диэлектрическая восприимчивость**. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными.

Поле в диэлектрике  $\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{связ}}$ . Микроэлектрическое поле сильно меняется внутри диэлектрика, среднее поле:  $E = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ .

В плоском диэлектрике  $E_0 = \sigma / \varepsilon_0$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.  $E' = -\sigma' / \varepsilon_0$ , где  $\sigma'$  — поверхностная плотность связанных зарядов.  $E = (\sigma - \sigma') / \varepsilon_0$ . Т.о., внутри диэлектрика напряженность ЭП такая, как у конденсатора с  $\sigma = \sigma - \sigma'$ . Величина  $q = (\sigma - \sigma')S$  называется **свободным зарядом**.

## Вектор электрической индукции

$\text{div } E = (\rho + \rho') / \varepsilon_0$ ,  $\int_V \text{div } \vec{p} dV = - \oint_S \vec{p} d\vec{S} = \int_V \rho' dV$ . Т.е.  $\text{div } \vec{P} = -\rho'$ .  $\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$ . Вектор  $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$  называют **электрической индукцией** (смещением).

Для изолированного проводника  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 E$ , где  $\varepsilon = 1 + \kappa$  — **диэлектрическая проницаемость** вещества.

## Термодинамическое описание диэлектриков

$\delta Q = dU + \sum A_i da_i = dU + \delta A$ ,  $dA = - \sum \varphi_i \vec{E} d\vec{r}_i = \vec{E} d\vec{P} = -d \left( \frac{EP}{2} \right)$ .  
 $\delta Q = TdS$ ,  $\Rightarrow TdS = dU - E dP$  или  $dU = TdS + E dP$ .

## Тензор диэлектрической восприимчивости

В анизотропных диэлектриках:  $P_{\aleph} = \varepsilon_0(\varkappa_{\aleph x} E_x + \varkappa_{\aleph y} E_y + \varkappa_{\aleph z} E_z)$ ,  $\aleph = \overline{x, y, z}$ .  $\varkappa_{\aleph \beth}$  – симметричный тензор второго ранга, **тензор диэлектрической восприимчивости**.

Т.к.  $\varepsilon = 1 + \varkappa$ , то **тензор диэлектрической проницаемости**:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varkappa_{xx} & 1 + \varkappa_{xy} & 1 + \varkappa_{xz} \\ 1 + \varkappa_{yx} & 1 + \varkappa_{yy} & 1 + \varkappa_{yz} \\ 1 + \varkappa_{zx} & 1 + \varkappa_{zy} & 1 + \varkappa_{zz} \end{pmatrix}; \quad D_{\aleph} = \sum_{\beth = \overline{x, y, z}} \varepsilon_{\aleph \beth} E_{\beth}.$$

## Энергия диэлектрика во внешнем электрическом поле

Плотность энергии ЭП в среде  $w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 / 2 = ED/2 = D^2 / (2\varepsilon \varepsilon_0) = \vec{E} \vec{D} / 2$ .  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $w = \varepsilon_0 \vec{E}^2 / 2 + \vec{E} \vec{P} / 2 = w_{\text{вак}} + \vec{E} \vec{P} / 2$ . Где  $w_{\text{вак}}$  – плотность энергии ЭП в вакууме.

Работа по поляризации единицы объема  $dA = \sum q_i \vec{E} d\vec{r}_i = \vec{E} d(\sum q_i \vec{r}_i) = \vec{E} d\vec{P} = d(\vec{E} \vec{P} / 2)$ . Значит,  $A = \vec{E} \vec{P} / 2$  – работа по поляризации единицы объема диэлектрика. Т.о.,  $w = w_{\text{вак}} + w_{\text{поляр}}$ ,  $w = \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ij} E_i E_j$ .

## Пондеромоторные силы в электрическом поле

На любое тело в ЭП действуют **пондеромоторные силы** (силы, которые действуют на тело в целом, а не только на заряды внутри него). Вычислим силу притяжения пластин конденсатора, отключенного от источника питания:  $\delta A = F dx$ ,  $dW = -\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 S dx$ ,  $\Rightarrow F = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 S$ , на единицу площади действует сила  $f = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = w$ .

Т.о., пондеромоторные силы легко вычислить при помощи ЗСЭ:  $\delta A = -dW$ ,  $F_{\text{понтд}} dx = -dW$ .

В общем случае поверхностная пондеромоторная сила  $f$  – тензор второго ранга, который называют **тензор натяжений**:

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Величины  $f_{\text{вн}}$  характеризуют поверхностные силы, приложенные к поверхности объема  $V$ . Т.к.  $f = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$ ,  $\hat{f} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \hat{\varepsilon}$ ,  $\Rightarrow f_{\text{вн}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{вн}} E^2$ .

Если заряд распределен по объему  $V$  с объемной плотностью  $\rho$ , то в электрическом поле на него действует сила:  $\vec{F} = \int \rho \vec{E} dV$ . Сила, действующая на диполь, является суммой сил, действующих на заряды диполя. Учитывая, что  $p = ql$ , сила, действующая на диполь, равна:  $\vec{F} = (p \nabla) \vec{E}$ .

На диполь действует пара сил, момент которой относительно центра диполя равен  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ . Он стремится повернуть момент диполя,  $\vec{p}$ , до совпадения с направлением поля,  $\vec{E}$ . Поскольку дипольный момент элемента объема  $dV$  поляризованного диэлектрика, находящегося в электрическом поле,  $\vec{E}$ , равен  $d\vec{p} = \vec{P} dV$ , на этот элемент объема действует сила  $d\vec{F} = (d\vec{p} \nabla) \vec{E} dV$ .

На элементарные объемы диэлектрика действуют силы, стремящиеся сдвинуть эти объемы в направлении максимальной скорости возрастания напряженности ЭП. Иначе говоря, элемент объема диэлектрика увлекается в сторону больших полей:  $\vec{F} \propto \text{grad } E^2$ .

## 34 Электронная теория поляризации диэлектриков

### Локальное поле. Полярные и неполярные диэлектрики

Диэлектрики можно разделить на полярные (полярная молекулярная связь) и неполярные (ковалентная связь).

У полярных диэлектриков все молекулы — диполи, и в отсутствие внешнего ЭП существует собственное локальное поле. Но, вследствие теплового движения, молекулы располагаются хаотично, следовательно, суммарное поле (макрополе) у диэлектрика равно нулю, хотя микрополе резко изменяется от точки к точке.

При внесении диэлектрика в ЭП, диполи ориентируются параллельно полю — **ориентационная** (диполярная) **поляризация**. У молекулярных кристаллов во внешнем поле происходит сдвиг решеток положительных и отри-

цательных ионов — **ионная поляризация**.

У многих веществ молекулы нейтральны. В грубом приближении будем считать молекулу совокупностью двух противоположно заряженных сфер с совпадающими центрами. В ЭП они смещаются, образуя диполь. В слабых ЭП  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}'$  — **электронная поляризация смещения** ( $\alpha$  — молекулярная диэлектрическая восприимчивость).

## Функция Ланжевена. Формула Клаузиуса–Моссотти

**Формула Ланжевена–Дебая** выражает зависимость диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  **полярного диэлектрика** от поляризуемости  $\alpha$  составляющих его частиц и от их концентрации  $n$ :

$$\epsilon = 1 + n \left( \alpha + \frac{p^2}{3kT\epsilon_0} \right), \quad \text{или} \quad \kappa = n\alpha + \frac{p^2 n}{3kT\epsilon_0},$$

где  $n$  — концентрация.  $\kappa_e = \alpha n$  — диэлектрическая восприимчивость за счет электронной поляризации;  $\kappa_0 = \frac{p^2 n}{3kT\epsilon_0}$  — ... за счет ориентационной поляризации. Действительно, у неполярных диэлектриков  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}'$ ,  $\vec{P} = n\vec{p} = \alpha n \epsilon_0 \vec{E}'$ , а т.к.  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}'$ , получим:  $\boxed{\kappa = \alpha n}$ .

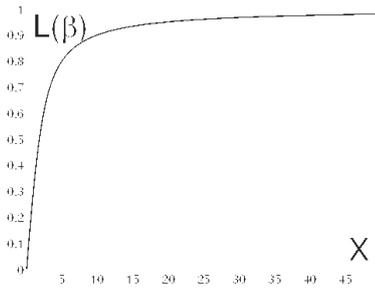
У **полярных диэлектриков** внутренняя энергия  $W = -\vec{p}\vec{E}$ . Т.к. минимум энергии соответствует параллельной ориентации  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ , диполи ориентируются параллельно полю, однако, тепловое движение в равновесном состоянии несколько расстраивает их ориентацию. Пусть  $\theta$  — угол между  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}$  ориентирован вдоль  $OZ$ . Тогда  $W = -pE \cos \theta = -p_z E$ . Согласно распределению Больцмана, получим число молекул, чьи вектора поляризации  $\vec{p}$  лежат в конусе  $d\Omega$ :  $dN = A_0 \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right) d\Omega = A_0 \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right) d\alpha \sin \theta d\theta$ , т.е.

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{p \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}, \quad \beta = \frac{pE}{kT}.$$

Пусть  $\mathcal{J} = \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta$ . Числитель предыдущей формулы есть  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \beta}$ .  $\mathcal{J} =$

$$\int_{-1}^1 e^{\beta x} dx = \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta, \quad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} (\operatorname{ch} \beta - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta}), \Rightarrow$$

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad \text{где} \quad L(\beta) = \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta} \quad \text{— функция Ланжевена.}$$



В слабых полях ( $pE \ll kT$ , т.е.  $\beta \ll 1$ )  $\operatorname{cth} \beta \approx \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3}$ ,  $\Rightarrow L \approx \frac{\beta}{3}$ .  $\langle p_z \rangle = \frac{p\beta}{3} = \frac{p^2 E}{3kT}$ ,  $\Rightarrow \chi_0 = \frac{\langle p_z \rangle n}{\varepsilon_0 E} = \frac{p^2 n}{3kT\varepsilon_0}$ .

В очень сильных полях  $\beta \gg 1$ , т.е.  $L \sim 1$ :  $\langle p_z \rangle \approx p$ . Следовательно, происходит насыщение внутреннего поля до величины  $E_{\text{нас}} = \frac{kT}{p}$ , и оно перестает расти.

**Формула Клаузиуса–Моссотти** *приближенно* выражает зависимость  $\varepsilon$  неполярного диэлектрика от  $\alpha$  и  $n$ :

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\alpha, \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha,$$

где  $M$  – молекулярная масса вещества,  $\rho$  – его плотность,  $N_A$  – число Авогадро. Данная формула справедлива для всех неполярных диэлектриков, для которых выполняется соотношение  $E_{\text{микро}} = E_{\text{макро}} + \frac{4\pi}{3} P$ , где  $E_{\text{микро}}$  – локальное микрополе,  $E_{\text{макро}}$  – среднее макрополе,  $P$  – поляризация диэлектрика (дипольный момент единицы его объема).

Если в диэлектрике содержится  $k$  сортов частиц, производится суммирование по всем сортам:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum n_k \alpha_k.$$

Формула Клаузиуса–Моссотти носит приближенный характер ввиду невозможности в общем случае дать рациональное объяснение понятию частиц, из которых состоит диэлектрик.

## Теорема Остроградского–Гаусса применительно к диэлектрикам

В отсутствие диэлектрика поток напряженности ЭП равен  $\Phi_E = q/\varepsilon_0$ ,  $D = \varepsilon_0 E$ ,  $\Rightarrow \Phi_D = q$ .

В диэлектрике поток индукции  $\Phi_D = \oint_S \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon \varepsilon_0 \Phi_E$ .

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \Rightarrow \boxed{\Phi_D = q}.$$

Т.о. в диэлектриках теорема Остроградского–Гаусса имеет тот же вид, что и в их отсутствии (для потока индукции ЭП), для потока напряженности  $\Phi_D = \varepsilon \varepsilon_0 q$ . Аналогично и для дифференциальной формы теоремы О–Г:  $\oint_V \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV$ ,  $\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$ ,  $\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho$ .

## Граничные условия в кусочно-однородной среде

В кусочно-однородной среде для напряженности и индукции ЭП существует два граничных условия:  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ .  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$  (т.к.  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ), значит, вдоль замкнутого контура, проведенного вокруг границы раздела сред,  $E_{1\tau} l - E_{2\tau} l + \langle E_{\text{бок}} \rangle \cdot 2h = 0$ . Максимально приближая контур к границе, получим:  $\langle E_{\text{бок}} \rangle = 0$ ,  $\Rightarrow \boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$ . Аналогично,  $\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$ ,  $\Rightarrow \boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$  — **граничные условия** для касательных составляющих  $E$  и  $D$  для поверхности раздела диэлектриков.

ГУ для нормальных составляющих получим из условия  $\Phi_D = \Phi_E = 0$  в случае отсутствия сторонних зарядов на границе раздела диэлектриков.

Рассмотрим цилиндрический участок поверхности раздела с площадью основания  $S$  и исчезающе малой высотой:  $D_{1n} S + D_{2n} S + \underbrace{\langle D_{\text{бок}} \rangle S_{\text{бок}}}_{\rightarrow 0} = 0$ ,  $\Rightarrow$  проектируя составляющие индукции на одну и ту же нормаль, получим:  $\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$ . И аналогично  $\boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ .

Т.о., при переходе через границу диэлектриков  $D_n$  и  $E_\tau$  меняются непрерывно, а  $D_\tau$  и  $E_n$  преломляются. Пусть  $\alpha_1$  — угол между электрическим полем и нормалью к границе раздела сред в первой среде,  $\alpha_2$  — ... во второй среде.

Тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1\tau}/D_{1n}}{D_{2\tau}/D_{2n}} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon_{12},$$

где  $\varepsilon_{12}$  — относительная диэлектрическая проницаемость двух сред.

## 35 Постоянный электрический ток

### Сила и плотность тока

**Электрический ток** — любое движение электрических зарядов. **Линия тока** — траектории движения зарядов. **Трубка тока** — воображаемая трубка, боковая поверхность которой состоит из линий тока.

**Плотность тока** — заряд, проходящий через единицу поверхности трубки тока за единицу времени. Она равна количеству заряда в трубке тока единичной площади и длины, равной средней скорости движения зарядов  $v$ :  $\vec{j} = ne\vec{v}$ , где  $e$  — заряд одной частицы.

За время  $dt$  через трубку пройдет заряд  $dq = \oint_S \vec{j} d\vec{S} dt$ . **Сила тока** — заряд, проходящий за единицу времени через поперечное сечение проводника:  $I = dq/dt$ ,  $\Rightarrow I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ .

### Уравнения непрерывности и стационарности

Рассмотрим замкнутую поверхность. Количество вытекающих в нее зарядов равно количеству вытекающих, получим **уравнение непрерывности**:

$$\boxed{-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}}.$$

Т.к.  $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$ , а  $q = \int_V \rho dV$ , получим дифференциальную форму уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Если токи стационарны, то все характеризующие их элементарные величины не зависят от времени, т.е.  $\rho = \text{const}$ ,  $I = \text{const}$ . Получим **уравнение стационарности**:  $\boxed{\text{div } \vec{j} = 0}$ .

## Электрическое напряжение. Сопротивление. Закон Ома

**Напряжение**,  $U$ , между точками  $A$  и  $B$  — работа по перемещению единичного положительного заряда из точки  $A$  в точку  $B$ :  $U = \varphi_B - \varphi_A$ .

Для любого проводника существует зависимость между напряжениями и токами, которая однозначна и линейна (получена экспериментально):  $\boxed{I = \Lambda U}$  — **закон Ома**, здесь  $\Lambda$  — **электропроводимость** проводника. Если ввести **сопротивление**  $R = \Lambda^{-1}$ , закон Ома примет вид:  $I = U/R$ .

Экспериментально установлено, что для проводников выполняется зависимость  $R = \rho \frac{l}{S}$ , где  $\rho$  — **удельное сопротивление** проводника,  $l$  — его длина,  $S$  — поперечная площадь. Можно записать и так:  $\Lambda = \lambda \frac{S}{l}$ , где  $\lambda$  — **удельная проводимость** проводника. Очевидно,  $\lambda = \rho^{-1}$ .

Проводимость при нормальных условиях линейно зависит от температуры:  $\rho = \rho_0(1 + \alpha[T - T_0])$ , где  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$  — **температурный коэффициент сопротивления**. В небольших интервалах температур  $\alpha \approx \text{const}$ .

Получим **дифференциальный вид закона Ома**.  $dI = \Lambda dU$ , а т.к.  $dI = j dS = E dl$ ,  $\Rightarrow j dS = \Lambda E dl$ ,  $\Lambda = \lambda dS/dl$ ,  $\Rightarrow \boxed{j = \lambda E}$ .

## Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца

**Работа** по перемещению единичного положительного заряда из одной точки в другую равна напряжению между этими точками, следовательно, работа по перемещению заряда  $q$  равна  $dA = q dU$ ,  $dA/dt = I dU$ ,  $dA = I dU dt$ ,  $\Rightarrow \boxed{A = UI t}$ . **Мощность** электрического тока  $P = dA/dt = IU = U^2/R = I^2 R$ .

При прохождении тока через проводник выделяется тепловая энергия, количество которой можно рассчитать по **закону Джоуля–Ленца**:  $\boxed{Q = UI t}$ . Тепло, выделяемое переменным током, рассчитывается по формуле  $Q =$

$$\int_0^t RI^2 dt.$$

$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$ . Величина  $Q_{\text{уд}} = \rho j^2$  называется **удельной тепловой мощностью тока**.

Аналогично,  $dQ = \Lambda U^2 dt = \frac{\lambda dS}{dl} (E dl)^2 dt = \lambda E^2 dV dt$ ,  $Q_{\text{уд}} = \lambda E^2$ .

**Закон Джоуля–Ленца** в дифференциальной форме:  $Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \lambda E^2$ .

## Сторонние силы. Электродвижущая сила

Для получения постоянного тока на заряды должны действовать силы, отличные от электростатических — **сторонние силы**:  $\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{E}^* q$ , где  $\vec{E}^*$  — напряженность поля сторонних сил.

**Электродвижущая сила** (ЭДС) — работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда:  $\mathcal{E} = dA/dq$ ,  $A = \int \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q \int \vec{E}^* d\vec{l}$ ,  $\Rightarrow$

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{(AB)} \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Для замкнутой цепи  $\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}$ .

Кроме сторонних сил на заряд действуют электростатические силы  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . Суммарная сила  $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_{\text{стор}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*)$ ,  $A_{12} = q \int (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = q(\Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}_{12})$ .  $U_{12} = \Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}_{12}$  — **напряжение на участке цепи 1–2**.

Участок, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Для него  $U = \Delta\varphi$ .

## Разветвление цепей. Правила Кирхгофа

Правила Кирхгофа для разветвляющихся участков электрических цепей являются следствием законов сохранения.

**Первое правило:** сумма токов, текущих в разветвляющийся участок проводников, равна нулю,  $\sum I_k = 0$  (закон сохранения заряда). При этом за направление тока выбирается направление движения положительных

зарядов, втекающие в узел токи считаются со знаком «плюс», вытекающие — со знаком «минус».

Рассмотрим некоторый замкнутый контур. Для каждого участка  $ab$  справедливо  $U_{ab} = I_{ab}R_{ab} - \mathcal{E}_{ab}$ . Так как суммарное напряжение на замкнутом контуре равно нулю, получим **второе правило Кирхгофа**: *сумма падений напряжения на участках замкнутого контура равна сумме ЭДС, действующих на этом участке*,  $\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$ .

Первое правило Кирхгофа называют еще условием стационарности токов, а второе — следствием основного свойства электростатического поля ( $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ ).

## Пондеромоторные силы

На тело в электрическом поле действуют **пондеромоторные силы**. При перемещении проводников изменяется их взаимная емкость. Следовательно, чтобы напряжение между этими телами оставалось постоянным, к ним необходимо подводить заряды. Каждый источник тока совершает работу  $\mathcal{E} dq = \mathcal{E} I dt$ . при этом проводники будут выделять тепло Джоуля–Ленца  $Q = RI^2 dt$ . Работа источников тока идет на тепло Джоуля–Ленца, компенсацию работы пондеромоторных сил  $\delta A$  и изменение электрического поля. Значит, для них можно написать ЗСЭ:

$$\sum \mathcal{E} I dt = \delta A + dW + \sum RI^2 dt.$$

В случае, если все проводники и диэлектрики неподвижны, работа источников тока полностью превращается в тепло.

В случае, когда  $q = \text{const}$ ,  $\delta A + dW + \sum RI^2 dt = 0$ , но тепло Джоуля–Ленца, связанное с перераспределением зарядов внутри проводника становится исчезающе мало. Значит,  $\delta A + dW = 0$  — механическая работа сил ЭП идет на уменьшение его внутренней энергии.

## 36 Квазистационарное приближение в электродинамике

### Постоянное магнитное поле. Взаимодействие токов

Электрический ток отклоняет магнитную стрелку; рамки с противоположно направленными токами, взаимно отталкиваются, следовательно, взаимодействие токов подобно действию токов на магнит и проявляется в **магнитном взаимодействии**.

Экспериментально установлено, что между двумя проводниками с током возникает сила  $\frac{dF}{dl} = k \frac{I_1 I_2}{r}$ , где  $r$  – расстояние между проводниками,  $dF/dl$  – удельная сила на единицу длины проводника.

Векторной характеристикой магнитного поля (МП) является **магнитная индукция**  $\vec{B}$ . Магнитное поле удовлетворяет условию **суперпозиции**:  $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$ .

**Закон Ампера:**  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = dq\vec{v} \times \vec{B}$ .

Магнитная индукция есть сила, действующая со стороны магнитного поля на единицу длины проводника с единичным током.

Магнитное поле, создаваемое участком проводника с током длины  $dl$  на расстоянии  $r$  от проводника, определяется согласно **закона Био–Савара–Лапласа**:

$$d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad k = \frac{\mu_0}{2\pi},$$

где  $\mu_0$  – **магнитная постоянная**.

Согласно закону Био–Савара–Лапласа, сила взаимодействия между двумя проводниками с током определится формулой:

$$d\vec{F} = k \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left( d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \vec{r}_{12}) - \vec{r}_{12} (d\vec{l}_1 d\vec{l}_2) \right).$$

Следует заметить, что, согласно СТО,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  взаимно переходят друг в друга в различных СК.

## Теорема о циркуляции индукции магнитного поля. Вихревой характер МП

Введем по аналогии с электрической индукцией вектор **магнитной напряженности**  $H$ . В вакууме  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ,

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \text{ (А/м)}.$$

В природе не существует магнитных зарядов (хотя Дирак высказал предположение о возможном существовании магнитных монополей), значит,  $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$ , т.е. поток вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность, равен нулю:  $\Phi_B = 0$ .

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S}$ ;  $\vec{B} d\vec{l} = B dl_B = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha$ , где  $\alpha$  – угловая ширина отрезка  $d\vec{l}$  со стороны проводника. Тогда  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha = \mu_0 I$ . Следовательно,  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , или  $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$ .

Сравнивая с соответствующими уравнениями для ЭП ( $\text{div } \vec{D} = \rho$ ,  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ), можно понять, что силовые линии МП непрерывны, т.е. **МП носит вихревой характер**.

По аналогии с электрическим напряжением, можно ввести **магнитное напряжение**:  $\oint \vec{H} d\vec{l} = U_m$ .

## Векторный потенциал

Т.к.  $\text{div } \vec{B} = 0$ , удобно ввести функцию  $\vec{A}$ , такую, что  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  (т.к.  $\text{div rot} \equiv 0$ ). Величину  $\vec{A}$  называют **векторным потенциалом**. Следует отметить, что векторный потенциал не имеет физического смысла. Он определен с точностью до  $\text{grad } \chi$ , где  $\chi$  – некоторая произвольная функция координат (т.к.  $\text{rot grad} \equiv 0$ ), поэтому введем дополнительное условие:  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ , а т.к.  $\text{rot rot} \equiv \text{grad div} - \Delta$ , получим **уравнение Пуассона**:  $\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$ .

Решим уравнение Пуассона.  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} dV}{r}$ ,  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot}(\vec{j}/r) dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$  – закон Био–Савара–Лапласа.

## Основные уравнения квазистационарного приближения

**Квазистационарными** называются явления, меняющиеся достаточно медленно со временем.

Согласно уравнениям Максвелла,  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ ,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{div } \vec{D} = \rho$ .

ЭП не является потенциальным, т.к.  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ , значит, напряженность  $\vec{E}$  не может быть представлена как  $\text{grad } \varphi$ .

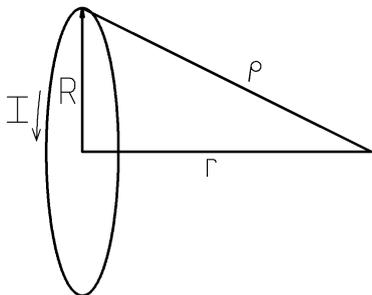
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\Rightarrow \text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ . Заменим  $\text{grad } \varphi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Тогда  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

$\text{div } \vec{D} = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho$ ,  $\Rightarrow \text{div}(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \rho/\varepsilon_0$ , тогда, т.к.  $\text{div grad} = \Delta$  и  $\text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ , получим:  $\Delta \varphi = -\rho/\varepsilon_0$  (как и в статическом случае).

Аналогично получим:  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ .

## 37 Магнитное поле квазистационарных токов

### Элементарный ток и его магнитный момент



**Элементарный ток** — замкнутый ток с размерами, значительно меньшими расстояния до наблюдателя. Вычислим МП в точке, лежащей на оси э. тока на расстоянии  $r$ .

$$\frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \beta}{\rho^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl R}{\rho^3}$$

$$H = \frac{IR}{4\pi \rho^3} \int dl = \frac{IS}{2\pi \rho^3} \approx \frac{IS}{2\pi r^3} = \frac{p_m}{2\pi r^3}$$

где  $p_m$  — **магнитный момент** э. тока, вводимый по аналогии с *дипольным моментом*.  $\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}$ , где  $\vec{n}$  — вектор нормали к э. току.

Если э. ток поместить в МП, на него начинает действовать момент сил, совершающий элементарную работу  $\delta A = M d\varphi$ ,  $\delta A = F dx = IlB dx = IB dS$ . Магнитный поток  $\Phi = \int B dS$ ,  $\Rightarrow \delta A = I d\Phi$ ,  $A = I\Delta\Phi$ . Тогда  $M d\varphi = I d\Phi = ISB \sin \alpha d\alpha$ ,  $\Rightarrow M = p_m B \sin \alpha$ . Значит, момент сил стремится повернуть виток с током перпендикулярно МП:  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ .

Если МП неоднородно, то  $F dx = I d\Phi$ ,  $d\Phi = \frac{\partial B_n}{\partial x} dx dS$ ,  $\Rightarrow F = p_m \frac{\partial B_n}{\partial x}$  или  $\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \text{grad}) \vec{B}$ , что в записи аналогично  $\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}$ .  
 $(\vec{p}_m \cdot \text{grad} = p_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial}{\partial z})$ .

### Дипольный магнитный момент тока. Магнитное поле в дипольном приближении

Векторный потенциал МП:  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{\rho}$ ,  $\rho = |\vec{r} - \vec{R}|$ . Разложим в ряд выражение  $\frac{1}{\rho}$ :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\aleph=x,y,z} \aleph \frac{\partial}{\partial \aleph} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \Big|_{R=0},$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \sum x_{\aleph} x_{\beth} + \frac{1}{2r^5} \sum (3x_{\aleph} x_{\beth} - R^2 \delta_{\aleph \beth}) x_{\aleph} x_{\beth} + \dots,$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \int_V \vec{j} dV + \frac{1}{r^3} \int_V \vec{j} dV + \frac{1}{2r^5} \int_V \sum (3x_{\aleph} x_{\beth} - R^2 \delta_{\aleph \beth}) x_{\aleph} x_{\beth} \vec{j} dV \right).$$

В последнем уравнении второе слагаемое – **дипольная составляющая МП**, третье – **квадрупольная составляющая**.

$\vec{j} dV = I d\vec{l}$ ,  $\int_V \vec{j} dV = \oint I dl$ . Квадрупольный момент э. тока близок к нулю.

Тогда:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \vec{j}(\vec{R}\vec{r}) dV.$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \vec{r} \times (\vec{I} \times \vec{R}) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{R} \times \vec{j}) \vec{r} dV.$$

$$p_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dV = \frac{1}{2} I \oint \vec{R} \times d\vec{l} = I \int d\vec{S} = I\vec{S}.$$

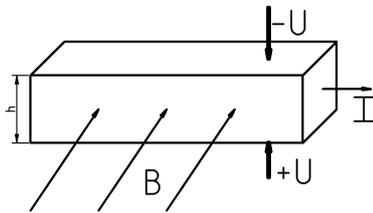
## Сила Лорентца

Сила, действующая на проводник с током в МП:  $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ . Но  $I\vec{l} = Nq\vec{v}$ , где  $N$  – полное число движущихся зарядов через поперечное сечение провода,  $\vec{v}$  – скорость их движения. Тогда  $\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$ . Сила, действующая на одну частицу, равна  $F/N$ :  $\vec{F}_1 = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

Если помимо МП на заряды действует ЭП, полная сила, действующая на один заряд, равна  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$  – **сила Лорентца**.

## Эффект Холла

**Эффект Холла** – возникновение в проводниках поперечной разности потенциалов под воздействием МП. Э. Холла возникает за счет действия силы Лорентца на электроны, движущиеся в проводнике.



В слабом МП э. Холла линеен:  $U = R_H h j B$ , где  $R_H$  – **постоянная Холла** (зависит от рода вещества),  $h$  – толщина пластинки из проводника,  $j$  – плотность тока. Сила Лорентца  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$  перераспределяя электроны, приводит к возникновению у граней пластинки из проводника противоположных зарядов.

За счет этого возникает поперечное ЭП  $\vec{E}$ .

В равновесии  $Ee = evB$ ,  $E = vB$ ,  $\Rightarrow U = vBh$ .  $j = nev$ ,  $U = jhB/(ne)$ ,  $\Rightarrow R_H = \frac{1}{ne}$ . Таким образом, измеряя при помощи э. Холла  $R_H$ , можно определить концентрацию свободных электронов в веществе.

## Поток вектора магнитной индукции

**Магнитный поток** –  $d\Phi = \vec{B} d\vec{S}$ ,  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ .

$\delta A = F dx = IlB dx = IB dS = I d\Phi$ ,  $\Rightarrow A = \int_S I d\Phi = I\Delta\Phi$  — работа по перемещению проводника в МП.

Если проводник движется на МП, на его концах возникает разность потенциалов — **ЭДС электромагнитной индукции** (движение электронов за счет силы Лорентца).

ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  равна работе по перемещению единичного положительного заряда в проводнике  $A_0$ , работа по перемещению всех свободных зарядов равна:  $\delta A = I d\Phi = dq \frac{d\Phi}{dt}$ . Тогда  $\delta A_0 = \frac{\delta A}{|dq|} = -\frac{d\Phi}{dt}$ , т.к.  $dq < 0$  (зарядами являются электроны).

Тогда  $\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$  — **основной закон электромагнитной индукции**. Знак «-» соответствует **закону Ленца**: *индукционный ток во всех случаях направлен так, что его действие противоположно действию причины, этот ток вызывающей.*

## Коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура. Коэффициент взаимной индукции

Т.к. в контуре  $B \propto I$ , можно написать:  $\Phi = LI$ , где коэффициент  $L$  называют **индуктивностью контура**. **Самоиндукция** — явление возникновения в контуре экстратокков, препятствующих изменению протекающего через контур тока:  $\boxed{\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}}$ .

Для катушки длины  $l$ , содержащей  $N$  витков,  $B = \mu_0 NI/l$ , поток, создаваемый одним витком  $N_1 = \mu_0 NIS/l$ . Суммарный поток  $\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 N^2 SI/l$ ,  $\Rightarrow L = \boxed{\mu_0 \frac{N^2 S}{l}}$ .

Рассмотрим два взаимодействующих контура:  $\Phi_{12} = L_{12}I_1$  — магнитный поток, возникающий во втором контуре под воздействием первого,  $L_{12}$  — **коэффициент взаимной индукции** контуров 1 и 2. Аналогично,  $\Phi_{21} = L_{21}I_2$ .

Очевидно, что для любых двух контуров  $L_{12} = L_{21}$ :  $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$ ,  $\mathcal{E}_1 = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$ .

Индукция МП первого контура  $B = \mu_0 I_1 N_1 / l$ ,  $\Phi_{12} = N_2 B S = \mu_0 N_1 N_2 S I_1 / l$ ,  $\Rightarrow L_{12} = \mu_0 N_1 N_2 S / l$ .  $\Phi_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S I_2 / l$ ,  $\Rightarrow L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S / l = L_{12}$ .

## 38 Магнитное поле в сплошной среде

### Вектор намагниченности и его связь с молекулярными токами

**Молекулярный ток** — элементарный ток, замыкающийся в пределах данного атома (будем считать, что он возникает за счет вращения валентных электронов). Таким образом, атомы обладают магнитным моментом  $\vec{p}_m = I\vec{S}$ .

Из-за этого магнетик приобретает общий магнитный момент  $\vec{J} = \sum \frac{\vec{p}_m}{\tau}$  — **вектор намагничения**, где  $\tau$  — физически малый объем, по которому производится суммирование. Т.о., вектор *намагничения является магнитным моментом единицы объема вещества*.

За счет молекулярных токов возникает молекулярная индукция  $B'$ , тогда суммарное МП  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ , где  $\vec{B}_0$  — внешнее МП.  $\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{B}_0 + \text{rot } \vec{B}'$ ;  $\text{rot } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}$ , где  $\vec{j}$  — плотность макротока.

Аналогично можно написать:  $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}_{\text{мол}}$ , где  $\vec{j}_{\text{мол}}$  — **плотность молекулярных токов**.

Рассмотрим совокупность молекулярных токов внутри косоугольного цилиндра  $S_{\text{мол}} \times dl$ . Будем считать, что все  $\vec{p}_m$  коллинеарны. Тогда суммарный ток равен  $I = I_{\text{мол}} n \vec{S}_{\text{мол}} d\vec{l} = \vec{p}_m n d\vec{l} = \vec{J} d\vec{l}$ .

$$I = \int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S}, \int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{J} d\vec{S}, \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{J}}.$$

### Вектор напряженности МП

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{J}$ ;  $\text{rot}(\vec{B}/\mu_0 - \vec{J}) = \vec{j}$ . Введем величину  $\vec{H}$  — **напряженность магнитного поля**:  $\boxed{\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}}$ .  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ ,  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} dS$ ,  $\Rightarrow$

$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_k$  — циркуляция напряженности МП равна сумме охватываемых контуром токов.

В слабых МП намагничение пропорционально напряженности МП:  $J = \chi H$ , где  $\chi$  — магнитная восприимчивость материала.  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \chi \vec{H}$ ,  
 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$ , где  $\mu = 1 + \chi$  — магнитная проницаемость.

## Тензор магнитной проницаемости

В анизотропных средах вектора  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  не коррелируют, следовательно  $\vec{J} = \hat{\chi} \vec{H}$ , где  $\hat{\chi}$  — тензор магнитной восприимчивости. Аналогично можно ввести тензор магнитной проницаемости:  $\hat{\mu} = \hat{1} + \hat{\chi}$ , где  $\hat{1}$  — тензор-единица, все элементы которого равны 1. Получим:  $\vec{B} = \mu_0 \hat{\chi} \vec{H}$ .

## Магнитное поле в сплошных и кусочно-однородных средах

### Граничные условия в кусочно-однородной среде

Т.к.  $\text{div } \vec{B} = 0$ , то  $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ ,  $\Rightarrow$  получим ГУ для нормальных составляющих индукции и напряженности МП в кусочно-однородных средах:

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}}, \Rightarrow \boxed{\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

Если на границах однородных участков отсутствуют токи, то  $\text{rot } \vec{H} = 0$ ,  $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$ ,  $\Rightarrow$  получим ГУ для касательных составляющих:  $\boxed{H_{\tau 1} = H_{\tau 2}}$ ,  $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

Из полученных ГУ можно вывести закон преломления МП на границах однородных сред:  $\boxed{\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$ .

### Магнитное поле в полостях

Если в МП поместить тело с магнитной проницаемостью  $\mu$ , превосходящей магнитную проницаемость окружающей среды  $\mu_{\text{окр}}$ , то линии МП будут сгу-

щаться в этом теле, иначе — разрезаться.

Если же тело полое, и у него  $\mu > \mu_{\text{окр}}$ , то линии индукции МП будут сгущаться внутри тела, что приведет к уменьшению индукции в полости.

Таким образом можно защитить чувствительные приборы от воздействия внешних магнитных полей (но, следует иметь в виду, что, в отличие от электростатической защиты, магнитная защита не избавляет от МП полностью, лишь уменьшая его величину).

### Методы измерения магнитного поля

На явлении электромагнитной индукции основаны простые методы измерения напряженности магнитных полей. Простейшим прибором, измеряющим напряженность МП, является **флюксметр**, представляющий собой катушку, соединенную с баллистическим гальванометром. Если катушку быстро повернуть в МП, отклонение стрелки гальванометра покажет прошедший через него индукционный заряд. Откалибровав гальванометр, можно таким образом измерять напряженность МП.

Для измерения магнитного напряжения  $\int \vec{B} d\vec{S}$  применяется **пояс Роговского**, который представляет собой гибкий ремень, на который навита проводящая спираль в два слоя, идущие навстречу друг другу. Концы проводов выводят в одном месте. Для измерения магнитного напряжения пояс располагают между нужными точками вдоль заданной кривой. Затем выключают ток, создающий МП. Отброс баллистического гальванометра, к которому подсоединены проводники пояса, пропорционален искомому магнитному напряжению.

## 39 Магнетики

### Классификация магнетиков

**Магнетики** — вещества, способные изменять внешнее магнитное поле. Магнетики делятся на следующие виды: **диамагнетики** — вещества с  $\chi < 0$

( $\mu < 1$ ), уменьшающие внешнее МП; **парамагнетики** — вещества с  $\chi > 0$ , увеличивающие внешнее МП; **ферромагнетики** — с  $\chi \gg 0$ , значительно увеличивающие внешнее МП и длительное время сохраняющие собственное поле после отключения внешнего МП.

## Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия

Рассмотрим вещество, собственные магнитные моменты атомов которого направлены в пространстве хаотически, не создавая собственного макроскопического магнитного поля. Будем рассматривать атом как круговой ток с магнитным моментом  $\vec{p}_m = -e\omega\vec{S}/(2\pi)$ , где  $\omega$  — круговая частота вращения электрона  $e$ . Момент импульса электрона  $\vec{L} = m\vec{\omega}r^2 = m\vec{\omega}S/\pi$ .

Введем **гиромагнитное отношение**:  $\Gamma = p_m/L = -e/(2m)$ .

Механический момент изменяется со скоростью, равной  $\dot{\vec{L}} = \vec{L} \times \vec{\omega}_L$ , где  $\omega_L$  — **частота ларморовой прецессии** (ларморова частота).

Т.к.  $\vec{\mu} = \vec{P}_m \times \vec{B}$ , а  $\vec{L} = \vec{M}$ , то  $\vec{p}_m \times \vec{B} = \vec{L} \times \vec{\omega}_L$ , а т.к. магнитный момент направлен противоположно моменту импульса,  $p_m B = -L\omega_L$ ,  $\Rightarrow$

$$\omega_L = \frac{p_m B}{L} = |\Gamma| B = \frac{1}{2} \frac{eB}{m}.$$

**Теорема Лармора:** действие МП на движущиеся электроны заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг вектора напряженности внешнего МП.

За счет прецессии появляется дополнительный круговой ток  $I'$ .  $p'_m = I'S' = -e\frac{\omega_L}{2\pi}\pi r'^2 = -\frac{e\omega_L}{2}r'^2$  — **наведенный магнитный момент**.

Итак, в диамагнетиках  $\chi = J/H < 0$ . Обусловленный ларморовым вращением диамагнетизм есть универсальное явление, наблюдающееся во всех средах. Однако, в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, которые, к тому же, могут выстраиваться коллинеарно, диамагнетизм перекрывается более мощными парамагнетизмом и ферромагнетизмом.

## Объяснение парамагнетизма по Ланжевену

**Закон Кюри** (получен экспериментально): молярная магнитная восприимчивость вещества обратно зависит от его температуры,  $\chi_m = \mathfrak{C}T^{-1}$ .

Классическую теорию парамагнетизма развил Ланжевен. Атом в МП обладает потенциальной энергией  $W = -\vec{p}_m \vec{B}$ , зависящей от угла между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ . Равновесное распределение молекул подчиняется закону Больцмана,  $\Rightarrow$

$$f(\theta) = \exp\left(\frac{p_m B \cos \theta}{kT}\right), \quad \theta = \angle(\widehat{\vec{p}_m, \vec{B}}).$$

Обозначим  $a = \frac{p_m B}{kT}$ .

При  $B = 0$ ,  $dP_\theta|_{B=0} = \frac{d\Omega_\theta}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$  — вероятность того, что угол  $\theta$  лежит в интервале  $(\theta, \theta + d\theta)$ ;  $d\Omega$  — телесный угол  $(\theta, \theta + d\theta)$ .

При  $B \neq 0$ ,  $dP_\theta = A \exp(a \cos \theta) \cdot \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ . При малых  $B$ , учитывая малость  $p_m$ , получим:  $a \ll 1$ ,  $\Rightarrow dP_\theta = A(1 + a \cos \theta) \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ ;  $1 = \int_0^\pi A(1 + a \cos \theta) \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = A$ ,  $\Rightarrow dP_\theta = \frac{1}{2}(1 + a \cos \theta) \sin \theta d\theta$ . Пусть  $n$  — концентрация атомов,  $dn_\theta = n dP_\theta$ . Каждый атом вносит свой вклад  $p_m \cos \theta$  в общую намагниченность, следовательно,

$$J = \int_0^\pi p_m \cos \theta dn_\theta = \frac{1}{2} n p_m \int_0^\pi (1 + a \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{n p_m a}{3}, \quad \boxed{J = \frac{n p_m^2 B}{3kT}};$$

$$\chi = \frac{J}{H} = \frac{n p_m^2 B}{3kTH}, \quad \boxed{\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}}.$$

Молярная магнитная восприимчивость:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT} > 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathfrak{C} = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3k}}.$$

## Квантовая теория парамагнетизма

Теория Ланжевена не применима к металлам, так как у них электроны проводимости образуют электронный газ, обладающий собственным парамагнетизмом.

По Ланжевону,  $\langle p_m \rangle = p_{m0}L(a)$ ,  $L = \text{cth } a - \frac{1}{a}$  – **функция Ланжевена**. Но Ланжевен не учел, что значение  $\cos \theta$  изменяется дискретно: проекция магнитного момента на силовые линии МП  $p_{mH} = m_j \Gamma \mu_B$ , где  $m_j$  – **магнитное квантовое число**,  $\mu_B$  – **магнетон Бора**. Следовательно,

$$\langle p_m \rangle = g \mu_B j B_j(\alpha), \quad \alpha = \frac{j \Gamma \mu_B B}{kT},$$

где  $B_j$  – **функция Бриллюэна** (обобщенная функция Ланжевена), которая переходит в функцию Ланжевена при  $j \rightarrow \infty$ . Тогда

$$J = N g \mu_B j B_j(\alpha).$$

Парамагнетизм обнаруживают атомы с неспаренными спинами (т.е. атомы с нечетным количеством электронов). Если электронные оболочки атома полностью заполнены, его собственный магнитный момент равен нулю, т.е. такое вещество будет проявлять диамагнетизм.

## Гиромангнитные опыты Эйнштейна и де-Хааса, Барнета

**Гиромангнитное отношение:**  $\Gamma = p_m/L$ . Вследствие вращения вокруг ядра, электрон подобен волчку, т.е. возникают гиромангнитные явления: намагничивание проводника приводит к его вращению и наоборот.

### Опыт Эйнштейна и де-Хааса

Если намагничивать стержень из магнетика, то магнитные моменты  $p_m$  электронов выстраиваются вдоль поля, а момент импульса  $L$  – против. Следовательно, суммарный механический момент электронов  $\sum L \neq 0$ . При этом из ЗСМИ  $L_{\text{стержня}} + \sum L = 0$ ,  $\Rightarrow$  стержень приходит во вращение.

Эйнштейн и де-Хаас в своем опыте подвесили тонкий железный стержень на упругой нити, к нему прикрепили зеркальце для контроля угла поворота стержня и поместили стержень внутрь соленоида. Так как угол поворота стержня очень мал, для его обнаружения пользовались явлением резонанса:

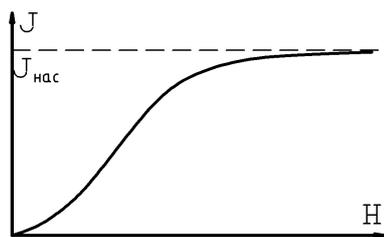
к соленоиду подводили переменный ток с частотой, равной частоте собственных колебаний стержня. В результате опыта получили, что гиромагнитное отношение  $\Gamma = -e/m$ , что в два раза больше теоретического.

### Опыт Барнета

Барнет в своем опыте наоборот, быстро раскручивал стержень и измерял создаваемое им магнитное поле. Результаты опыта совпали с результатами Эйнштейна и де-Хааса.

В последствии результаты опытов были объяснены тем, что в них измерялось спиновое гиромагнитное отношение  $p_{mS}/L_S = -e/m$ .

### Ферромагнетики. Гистерезис



У ферромагнетиков наблюдается сложная зависимость  $J$  от  $H$  (см. рис.). Кривая намагничивания такого типа (т.е. при  $J_0 = 0$ ) называется **основной (нулевой)**.

#### Гистерезис

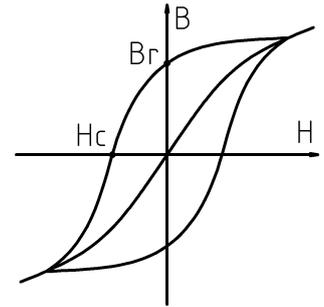
При последовательном намагничивании и размагничивании ферромагнетиков наблюдается такое явление, как **гистерезис**: Даже при полном уменьшении напряженности МП ферромагнетик остается намагничен (**остаточная индукция  $B_r$** ). Для полного размагничивания ферромагнетика необходимо внести его в магнитное поле с противоположно направленной индукцией (**коэрцитивная сила  $H_c$** ).

Если  $H$  такова, что намагничение ферромагнетика достигает величины насыщения ( $J = J_{нас}$ ), петля гистерезиса называется максимальной. Все другие петли называются частными циклами. Ферромагнетик с большим значением  $H_c$  называют жестким, с малым значением  $H_c$  – мягким.

Основы теории гистерезиса заложили Френкель и Хайсенберг. При определенных условиях в кристаллах возникают обменные силы, разворачиваю-

щие магнитные моменты электронов коллинеарно. Образуются области спонтанного намагничивания (**домены**). В пределах каждого домена ферромагнетик обладает определенной намагниченностью. Обычно домены ориентированы так, что взаимно компенсируют намагниченность, в результате чего общая намагниченность металла равна нулю.

Под действием МП домены разворачиваются вдоль поля. При этом значения намагничивания меняются скачком — **эффект Баркгаузена**.



### Магнитная анизотропия

Анализ кривых намагничивания показывает, что существуют т.н. **оси легкого и трудного намагничивания**, из-за того, что существуют взаимодействия, ориентирующие в кристалле намагниченности вдоль определенного направления. К этому приводит перекрытие электронных орбит: спиновые моменты взаимодействуют с орбитальными, а те, в свою очередь, со всей кристаллической решеткой.

### Ферромагнетизм как следствие обменных сил

Энергия взаимодействия электронов складывается из **обменной энергии** и энергии кулоновского взаимодействия. Обменная энергия возникает из-за взаимодействия спинов электронов:  $E_{\text{об}} = -A\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_r$ , где  $\sigma$  — единичный спиновый вектор,  $A$  — **обменный интеграл**.

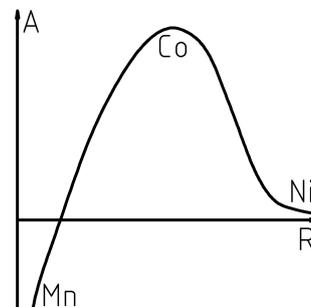
При  $A > 0$  минимальной энергии соответствует одинаковое направление спинов, при  $A < 0$  спины должны быть направлены противоположно. Для всего ТТ  $E_{\text{об}} = -\sum A_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j$ , где  $S$  — результирующие спины атомов.

Величина обменного интеграла зависит от межатомного расстояния.

В пространственном случае двухэлектронной системы  $A = \frac{1}{2}(E_S - E_T)$ , где  $E_S$  — энергия синглетного состояния ( $S = 0$ ),  $E_T$  — энергия триплетного состояния ( $S = 1$ ). При  $A > 0$   $E_T < E_S$  и основным состоянием будет три-

плетное, спины атомов направлены противоположно (ферромагнетизм). При  $A < 0$   $E_S < E_T$  – **антиферромагнетизм** или **ферримагнетизм**.

Антиферромагнетизм наблюдается при противоположном направлении спинов атомов, когда их величины полностью совпадают ( $J = 0$ ). Ферримагнетизмом называют антиферромагнетизм с неполной компенсацией спиновых моментов.



## Температурная зависимость намагниченности. Точка Кюри

**Закон Кюри–Вейсса:** магнитная восприимчивость ферромагнетиков зависит от температуры по закону:  $\chi = \mathfrak{C}(T - T_K)^{-1}$ . Температура  $T_K$  называется температурой (точкой) Кюри.

При  $T = T_K$  ферромагнетик превращается в парамагнетик. При этой температуре за счет теплового движения области спонтанного намагничивания разрушаются, и у вещества остаются лишь парамагнитные свойства. При охлаждении ниже точки Кюри вновь возникает доменная структура и вещество опять становится ферромагнетиком.

Для антиферромагнетиков существует особая температура  $T_N$  — **температура (точка) Нееля**, при которой исчезает антиколлинеарность спинов. У некоторых антиферромагнетиков существует две точки Нееля: ниже меньшей ( $T_{Nmin}$ ) они являются ферримагнетиками, от  $T_{Nmin}$  до  $T_{Nmax}$  — антиферромагнетиками, выше  $T_{Nmax}$  — парамагнетиками.

С повышением температуры энергия ферромагнетика возрастает за счет «переворачивания» спина атома. Обменные взаимодействия приводят к обратному «переворачиванию» спина, но при этом «переворачивается» спин соседнего атома. Возникают **спиновые волны** (теория Блóха). **Магноном** называют квант энергии спиновой волны. Магнонный газ подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна. Число магнонов растет пропорционально  $T^{3/2}$ . **Закон**

Блоха:

$$J(T) = J_{\text{нас}} \left(1 - \beta \left(\frac{T}{\theta}\right)^{3/2}\right),$$

где  $J_{\text{нас}}$  – намагничение насыщения;  $\theta$  – некоторая температура ( $T \ll \theta$ );  $\beta \approx 1$  – коэффициент.

## 40 Явление электромагнитной индукции

### Закон Фарадея. Правило Ленца

**Закон электромагнитной индукции (ЭМИ):**  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Знак « $-$ » в этом законе — согласно **правила Ленца**: *индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать вызывающей его причине*. Приведенную форму закона ЭМИ называют формой Максвелла (дифференциальная форма закона Фарадея).

**Закон Фарадея:** *величина заряда, прошедшего по цепи, пропорциональна полному числу линий магнитной индукции, пересекаемых проводником, и обратно пропорциональна сопротивлению цепи:*  $q = \frac{\Phi}{R}$ . Действительно,

$q = \int_0^t I dt = \int_0^t \mathcal{E}/R dt = -1/R \int_{\Phi}^0 d\Phi = \Phi/R$ . Из закона Фарадея следует определение величин магнитного потока (вебер, Вб) и магнитной индукции (тесла, Тл).

Формулировка Максвелла закона ЭМИ: *ЭДС индукции равна скорости пересечения проводником линий магнитной индукции*.

### Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться не только в замкнутых проводниках, но и в массивных незамкнутых. Их называют **токами Фуко**. Так как вихревые токи Фуко противятся внешней причине, движущиеся внутри МП массивные проводники затормаживаются (на этом эффекте основано демп-

фирование стрелок измерительных приборов), а также нагреваются в переменных ЭМП (индукционные печи).

Токи Фуко являются также причиной скин-эффекта.

## Явление само- и взаимоиндукции

**Самоиндукция** — возникновение ЭДС индукции в электрической цепи вследствие изменения тока, протекающего в ней. Аналогично закону ЭМИ, ЭДС самоиндукции равна  $\mathcal{E}_{Si} = -\frac{d\Psi}{dt}$ , где  $\Psi$  — **потокосцепление** самоиндукции (поток через все витки рассредоточенной катушки).

При самоиндукции  $I \propto \Psi$ ,  $\Rightarrow I = LI$ , где  $L$  — **индуктивность** контура. В центре длинного соленоида  $L = MM_0n^2V$ , где  $n$  — количество витков проводника на единицу длины соленоида,  $V$  — объем внутри соленоида.  $\mathcal{E}_{Si} = -L\frac{dI}{dt}$ .

**Взаимоиндукция** — возбуждение ЭДС индукции в одной цепи при изменении тока, протекающего по другой, или же изменении их взаимного расположения.

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \quad \Psi_{12} = M_{12}I_2, \quad \Psi_{21} = M_{21}I_1.$$

$\Psi_{ik}$  называют **потокосцеплением** взаимной индукции  $i$ -й и  $k$ -й цепей,  $M_{ik}$  — взаимной индуктивностью.

Если контуры находятся в неферромагнитной среде, то  $M_{12} = M_{21}$ .

## Магнитная энергия контура с током

ЭДС является работой по перемещению единичного положительного заряда, следовательно, работа по преодолению ЭДС самоиндукции равна  $A = \int_0^t \mathcal{E}_{Si} I dt = \Psi I / 2 = LI^2 / 2$ ,  $\Rightarrow$  по ЗСЭ,  $W = \frac{LI^2}{2}$ . Для соленоида  $L = \mu\mu_0n^2V$ ,  $H = nI \Rightarrow$

$$W = \frac{\mu\mu_0H^2}{2}V = \frac{1}{2}HBV, \quad w = \frac{1}{2}HB.$$

Суммарная энергия нескольких контуров  $W = \sum \Psi_i I_i / 2$ ,  $\Psi_i = \Psi_{Si} + \sum_{j \neq i} \Psi_{ij}$ . Таким образом, энергия складывается из собственной энергии токов

$W_0$  и энергии взаимодействия токов  $W_{вз}$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} M_{ij} I_i I_j = W_0 + W_{вз}.$$

Если обозначить  $L_i = M_{ii}$ , получим:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j M_{ij} I_i I_j.$$

Энергия МП — не что иное, как собственная энергия тока в цепи. Таким образом, энергия МП в веществе:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{поля}}} BH \, dV = \frac{\mu\mu_0}{2} \int_V H^2 \, dV = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int_V B^2 \, dV.$$

$$w = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

## 41 Электромагнитные колебания в контуре

### Квазистационарные поля. Критерии квазистационарности

**Квазистационарными** называют поля, изменяющиеся со временем достаточно медленно.

#### Первый критерий квазистационарности

Изменение ЭМП столь медленное, что внутри проводящих сред можно пренебречь током смещения  $\vec{j}_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  по сравнению с током проводимости:  $j_{см\,max} \ll j_{max}$ .

Если ЭМП меняется с частотой  $\omega$ , ток смещения  $j_{см} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 \exp(i\omega t)$ ,  $j = \gamma E = \gamma E_0 \exp(i\omega t)$ .  $j_{см}/j = \omega\varepsilon\varepsilon_0/\gamma \ll 1$ ,  $\Rightarrow$  первый критерий квазистационарности:  $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ , где  $\gamma$  — удельная проводимость.

В металлах  $\varepsilon \approx 1$ ,  $\Rightarrow \omega \ll \gamma/\varepsilon_0$ , что выполняется для частот до  $\sim 10^{18}$  Гц (ультрафиолет).

Если учесть инерционные свойства среды, предельная частота несколько уменьшится.

## Второй критерий квазистационарности

Можно пренебречь запаздыванием ЭМВ ( $c \ll \infty$ ):

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega(t-x/c)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega x/c}; \quad e^{-i\omega x/c} = 1 - i\omega \frac{x}{c} + \dots$$

Эффектом запаздывания можно пренебречь, если  $\omega x/c \ll 1$ ; т.к.  $\omega/c = 2\pi/\lambda$ , получим:  $x \ll \lambda$ . Таким образом, линейные размеры области должны быть значительно меньше длины волны. Для промышленного переменного тока  $\lambda \sim 10^7$  м, т.е. эффектами запаздывания можно пренебречь для довольно значительных областей.

Следовательно, к квазистационарным полям относится большинство полей электротехники и многие поля радиотехники.

Т.к. мы пренебрегли током смещения, уравнения Максвелла примут вид:

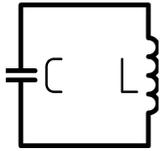
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}}).$$

## Переходные процессы в RC и LC цепях. Колебательный контур

### Цепь LC — колебательный контур

Замкнем колебательный контур с заряженным конденсатором. ЭП конденсатора начнет уменьшаться. Ток, протекающий по катушке, вызовет в ней МП. Через четверть периода колебаний конденсатор полностью разрядится, а МП в катушке достигнет максимума. Далее поле в катушке начинает уменьшаться, возбуждая экстраток самоиндукции, который направлен так, чтобы поддержать разряд конденсатора (правило Ленца). Конденсатор начинает

заряжаться, причем направление ЭП в нем теперь противоположно первоначальному. Через половину периода после начала колебаний конденсатор полностью заряжен, МП в катушке отсутствует. Далее начинается процесс разрядки конденсатора. В контуре устанавливаются гармонические колебания ЭП в конденсаторе и МП в катушке.



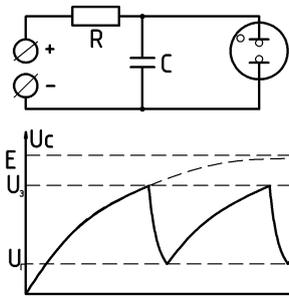
Применим к контуру второе правило Кирхгофа:  $\sum U = \sum \mathcal{E}$ ,  $U_C = -L \frac{dI}{dt}$ ,  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $\Rightarrow L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$ . Получим **уравнение гармонических незатухающих колебаний**:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad U_C = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad I_0 = q_0 \omega_0, \quad U_0 = q_0 / C.$$

Таким образом, *между колебаниями тока и напряжения существует сдвиг фаз*, ток отстает от напряжения по фазе на  $\Delta\varphi = \pi/2$ .

### Цепь RC



Рассмотрим RC контур с неоновой лампой. В отсутствие лампы конденсатор заряжается по закону  $U = \mathcal{E}[1 - \exp(-\frac{t}{RC})]$ . Однако, если в контур включить неоновую лампу, играющую роль разрядника, при достижении напряжения зажигания лампы  $U_3$ , она вспыхивает, что приводит к разряду конденсатора до напряжения гашения лампы  $U_Г$ . Если пренебречь временем разряда конденсатора, получим для периода **релаксационных колебаний** в контуре RC:

$$T = T_3 + T_Г = RC \ln \frac{\mathcal{E} - U_Г}{\mathcal{E} - U_3}, \quad T \approx \frac{U_3 - U_Г}{\mathcal{E}} RC.$$

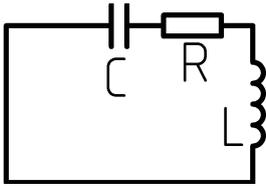
### Энергия, запасенная в контуре

Энергия контура складывается из энергии ЭП и МП:  $E = E_C + E_L$ ,  $E_C = U^2 C / 2$ ,  $E_L = I^2 L / 2$ ,  $\Rightarrow E_C = U_0^2 C / 2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$ ,  $E_L = I_0^2 L / 2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$ .  $\langle E_C \rangle =$

$$U_0^2 C/4, \langle E_L \rangle = I_0^2 L/4. I_0 = q_0 \omega_0 = U_0 C \omega_0, I_0^2 = U_0^2 C/L, \Rightarrow \langle E_C \rangle = \langle E_L \rangle,$$

$$E = U_0^2 C/2 = I_0^2 L/2.$$

## Затухающие колебания в контуре и их уравнение



В реальном контуре происходят потери тока на внутреннем сопротивлении элементов, т.е. в цепь идеального контура необходимо ввести дополнительный элемент — сопротивление  $R$ .

Применяя к этому контуру второе правило Кирхгофа, получим:  $IR + U_C = -L \frac{dI}{dt}$ ,  $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$ . Пусть  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ,  $2\beta = R/L$ , тогда:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решая данное уравнение, получим (при  $\beta < \omega_0$ ):

$$q = \exp(-\beta t) [A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)],$$

$$q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

$$U = U_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi);$$

$$I = I_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi + \psi), \quad \text{tg } \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

## Время релаксации

Первый критерий квазистационарности можно переписать так:  $\omega \epsilon \epsilon_0 \ll \gamma$ ;  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ ,  $\Rightarrow 2\pi \epsilon \epsilon_0 \ll T\gamma$  или  $\epsilon \epsilon_0 \ll T\gamma$ ,  $\epsilon \epsilon_0 / \gamma \ll T$ . Время  $\tau_m = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\gamma}$

называют **временем релаксации Максвелла**. Таким образом, критерий квазистационарности примет вид  $\tau_m \ll T$ .

Физический смысл времени релаксации — это время, за которое заряд уменьшается в  $e$  раз. Для реального контура время релаксации  $\tau_m = 1/\beta$ , где  $\beta$  — коэффициент затухания.

## Логарифмический декремент затухания. Добротность

Рассмотрим два соседних колебания  $q_n(t)$  и  $q_{n+1}(t+T)$ ;  $q_n/q_{n+1} = \exp(\beta T)$ .

**Логарифмическим декрементом затухания** называют величину  $\delta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \beta T$ .

Т.к.  $\tau = 1/\beta$ , то  $\delta = T/\tau = 1/N$ : *логарифмический декремент затухания есть обратное число колебаний, совершающихся в контуре за время релаксации* (т.е. за время, когда амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз).

**Добротность** контура — это помноженное на  $\pi$  число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз:  $Q = \pi/\delta = \pi\tau/T = \pi N$ .

## Вынужденные колебания. Ширина резонансной кривой

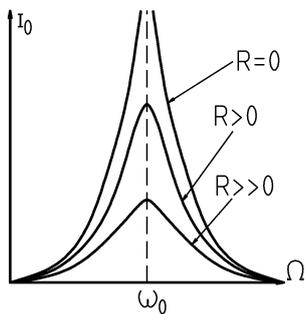
Пусть внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ .

Тогда  $IR + U_C = -L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}(t)$ ,  $\Rightarrow$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \Omega t.$$

При  $\beta^2 \ll \omega^2$  частота установившихся колебаний будет равна частоте внешней ЭДС:

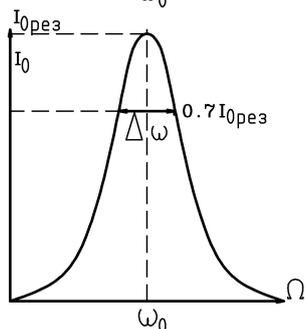
$$q = q_0 \cos(\Omega t - \psi), \quad q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}.$$



$$U_C = U_0 \cos(\Omega t - \psi), \quad I_L = I_0 \sin(\Omega t - \psi).$$

Видно, что при  $\Omega = \omega_0$  амплитуды резко возрастают, а фаза  $\psi$  испытывает скачек: наблюдается **резонанс**.

Добротность контура определяет остроту резонансных кривых. Рассмотрим отношение  $I_0/I_{0\text{рез}} = 0.7$  ( $0.7^2 \approx 0.5$ , что соответствует половине резонансной мощности). Тогда ширина резонансной кривой на этом уровне  $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ .



$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}} = \Omega q_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

$$I_{0\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\beta L} = \frac{\mathcal{E}_0 T Q}{2\pi L}.$$

### Процесс установления вынужденных колебаний. Нормальные колебания

Вынужденные колебания устанавливаются по прошествии некоторого времени после включения вынуждающей ЭДС. При замыкании цепи кроме вынужденных колебаний появляются еще и собственные затухающие колебания

$$q_C = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \psi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

С течением времени  $\exp(-\beta t) \rightarrow 0$ , и остаются только вынужденные колебания.

Время установления вынужденных колебаний зависит от времени релаксации: чем оно больше, тем дольше будут устанавливаться колебания. Амплитуда колебаний медленно возрастает, частота колебаний в контуре постепенно приближается к частоте вынуждающей ЭДС.

В связанных контурах колебания аналогичны вынужденным, но здесь роль вынуждающей ЭДС играет ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}$ . Индукционные токи, возникающие под воздействием  $\mathcal{E}_{12}$  во втором контуре, создают в первом контуре ЭДС взаимной индукции, уменьшающую амплитуды колебания тока и напряжения. Во втором контуре устанавливаются колебания с частотой вынуждающей ЭДС. Если  $\Omega = \omega_0$  наблюдается резонанс.

**Нормальные колебания** — гармонические собственные колебания, которые могли бы существовать в линейных системах при отсутствии в них потерь энергии. В каждом нормальном колебании все точки колеблются с одной и той же частотой. Число нормальных колебаний оказывается равным числу СС контура.

## 42 Механизмы электропроводности твердого тела

### Проводники. Основные положения классической теории Друде–Лоренца

**Проводники** — тела, в которых могут двигаться заряды, создавая электрический ток. Высокая проводимость металлов обусловлена существованием свободных электронов проводимости.

В классической **теории Друде–Лоренца** электроны в металлах рассматриваются как электронный газ. Плотность электронного газа 1-валентного металла  $n_0 = \rho N_A / A$ , где  $A$  — атомная масса металла,  $\rho$  — его плотность. Средняя кинетическая энергия электронов  $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$ .

Ток возникает под действием внешнего электрического поля, вызывающего упорядоченное движение электронов. Плотность тока  $\vec{j} = -n_0 e \langle \vec{v} \rangle$ , где  $\langle \vec{v} \rangle$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов.  $\langle v \rangle \approx$

$\frac{1}{2} v_{max}$  (при равноускоренном движении),  $\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{eE\tau}{2m} = bE$ , где  $b = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \tau$  — подвижность электронов,  $\tau$  — время свободного пробега.  $\tau$  различно для разных электронов, поэтому

$$b = \frac{e}{m} \langle \tau \rangle.$$

### Законы Ома и Джоуля–Ленца в классической теории

В классической теории  $j = \frac{n_0 e^2 \langle \tau \rangle}{2m} E$ . Введем коэффициент  $\lambda = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \langle \tau \rangle}{m}$  — электропроводимость металла, тогда получим закон Ома:  $j = \lambda E$ . Таким образом, сопротивление проводников обусловлено столкновениями электронов проводимости с кристаллической решеткой.

К концу пробега электрона  $\frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 \langle \tau \rangle^2 E^2}{m}$ . Согласно предположению Друде, эта энергия переходит в энергию кристаллической решетки (тепловая энергия). За секунду каждый электрон испытывает в среднем  $1/\langle \tau \rangle$  соударений, при которых сообщается энергия кристаллической ре-

шетке. Тогда в единице объема за секунду выделяется  $Q_1 = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \langle \tau \rangle}{m} E^2$  тепла. Тогда получим закон Джоуля–Ленца:  $Q_1 = \lambda E^2$ .

## Зонная теория твердого тела. Принцип Паули. Статистика Ферми–Дирака

Согласно квантовой теории ТТ, движение электронов в ТТ определяется уравнением Шрёдингера  $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = E \Psi$ , где  $\Psi$  – волновая функция электрона,  $E$  – его энергия. Решения уравнения дают дискретные значения энергии электрона, т.е. в металлах энергия электрона квантуется. Уровни энергии свободных электронов являются вырожденными.

**Принцип Паули:** в одном и том же энергетическом состоянии не может быть более одного фермиона с заданной комбинацией квантовых чисел  $s, l, n, m$ . При  $T = 0$  все энергетические состояния с энергиями меньше некоторого значения  $E_F$  вследствие запрета Паули заняты. Энергия  $E_F = \max(E)|_{T=0}$  называется **уровнем Ферми**. Состояния с  $E > E_F$  при абсолютном нуле оказываются вакантными.

Т.к. электроны – фермионы, они подчиняются **статистике Ферми–Дирака:**

$$f(E) = \left( \exp \frac{E - E_F}{kT} + 1 \right)^{-1}.$$

Независимо от температуры  $f(E_F) = 1/2$ , т.е. уровень Ферми можно еще определить как энергию электронов с функцией распределения  $f = 1/2$ . Уровень энергии Ферми металлов очень высок, поэтому при всех разумных температурах электронный газ металлов вырожден.

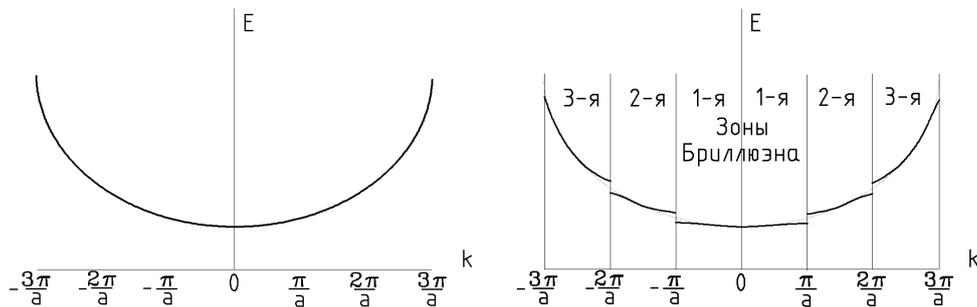
Т.к. на валентные электроны влияет периодическое электрическое поле решетки, спектр значений энергии электронов разбивается на ряд разрешенных и запрещенных зон (**зонная структура**).

Рассмотрим процесс объединения  $N$  атомов в кристалл. Запрет Паули приводит к тому, что электроны занимают  $N$  близко расположенных энергетических уровней, образующих **зону**. Сильнее всего расщепляются внешние

энергетические уровни, в то время как внутренние практически не расщепляются.

Решение уШ для электрона в кристалле получено Блохом:  $\Psi = U_k(r) e^{ikr}$  — **функция Блоха**.  $U_k(r)$  — периодическая функция распределения потенциальной энергии с периодом, равным периоду кристаллической решетки,  $k = p/\hbar$  — **волновой вектор** электрона.

Область  $k$  пространства, внутри которой энергия электрона в кристалле изменяется квазинепрерывно, называется **зоной Бриллюэна**.



Распределение энергии свободных электронов и электронов в кристалле

Существование энергетических зон помогает объединить свойства проводников, полупроводников и диэлектриков.

### Зонная структура проводников

В металлах верхние энергетические уровни валентной зоны связаны, следовательно, она является зоной проводимости. Высокая проводимость металлов объясняется тем, что электрону нет необходимости преодолевать энергетический барьер между зоной проводимости и валентной зоной, достаточно лишь «перескочить» на свободный валентный уровень.

### Зонная структура полупроводников

В полупроводниках валентная зона полностью заполнена, для возникновения проводимости электронам необходимо преодолеть запретную зону, которая у полупроводников не очень велика ( $\sim 1$  эВ). Если энергии теплового движения достаточно для преодоления запрещенной зоны, такое вещество называют собственным полупроводником.

Т.к. при уменьшении температуры максимальная энергия электронов падает до уровня Ферми, проводимость полупроводников при уменьшении температуры падает (в отличие от проводников).

### **Зонная структура диэлектриков**

В диэлектриках валентная зона, как и в полупроводниках, полностью заполнена. Однако, ширина их запретной зоны значительно больше ( $\sim 5 \div 10$  эВ). Это приводит к тому, что очень малое количество электронов диэлектрика способно покинуть валентную зону, чем и объясняется их низкая проводимость.

### **Собственная и примесная проводимость полупроводников**

У полупроводников в валентной зоне находится 4 электрона. При повышении температуры происходит разрыв некоторых валентных связей и образуется пара **электрон–дырка**. Т.о., **собственная проводимость** обусловлена переносом зарядов электронами и дырками и является совокупной электронно-дырочной проводимостью.

Для увеличения проводимости в полупроводники добавляют примеси: трехвалентные (**акцепторные**) и пятивалентные (**донорные**).

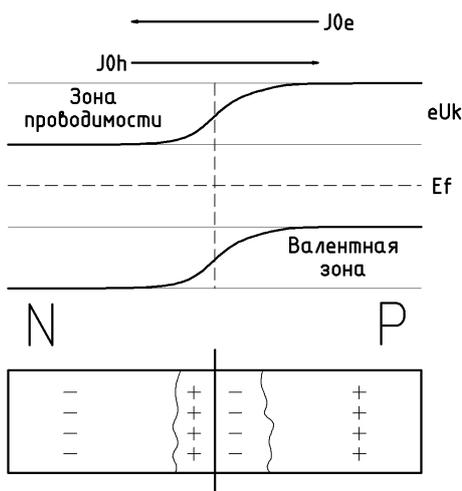
Акцепторы, замещая атом полупроводника, приводят к появлению в нем дополнительных дырок. Доноры же выполняют вклад в увеличение числа свободных электронов. Если в полупроводнике количество электронов превышает количество дырок, в нем возникает *электронная проводимость* (n-типа), иначе — *дырочная проводимость* (p-типа).

Проводимость примесного полупроводника зависит от температуры: при ее повышении вклад примеси резко падает и проводимость становится собственной.

Примесь создает в энергетическом барьере полупроводника дополнительный уровень (уровень Ферми): донорная — ближе к зоне проводимости, ак-

цепторная — ближе к валентной зоне. Благодаря этому становится легче проникновение электронов в зону проводимости у доноров и переход электронов в валентную зону у акцепторов.

## P–N переход. Контактные явления



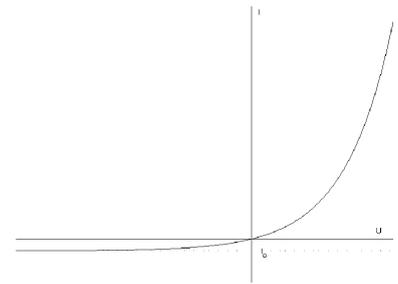
В случае контакта полупроводников р- и n-типа, в области контакта их уровни Ферми выравниваются, т.к. они обмениваются свободными носителями, следовательно, энергетические зоны искривляются, образуя **контактную разность потенциалов** и потенциальный барьер  $\varphi = eU$ .

В области контакта образуется двойной слой объемных зарядов, создающих поле, направленное противоположно первоначальному, и препятствующее дальнейшему передвижению носителей через **p–n переход**. При этом существуют слабые токи: **дифференциальный ток**  $I_d$  основных носителей заряда (хвост распределения Максвелла) и **дрейфовый ток**  $I_0$  неосновных носителей заряда, для которых потенциальный барьер p-n перехода оказывается открытым. В равновесном состоянии  $I_0 = I_d$ , т.е. суммарный ток через p-n переход равен нулю.

Если приложить к p-n переходу внешнее напряжение, оно раздвигает уровни Ферми. Если источник включен прямо («+» к p-области), то  $\varphi = e(U - U_{\text{прям}})$ , т.е. высота барьера падает (в p-области  $E_F$  уменьшается, в n-области — увеличивается). Следовательно, при этом проводимость p-n перехода возрастает. Если же приложить обратное напряжение,  $\varphi = e(U + U_{\text{обр}})$ , и проводимость падает за счет того, что величина дифференциального тока уменьшается, а дрейфовый ток остается. Величина обратного тока, протекающего через полупроводник, определяется величиной дрейфового тока:  $I = I_d - I_0 \rightarrow I_0$ , т.к.  $I_d \rightarrow 0$ .

Концентрация основных носителей подчиняется распределению Больцмана:  $n = n_0 \exp\left(-\frac{\varphi - eU}{kT}\right)$  (если приложено обратное напряжение,  $U = -U_{\text{обр}}$ ). Тогда для вольт-амперной характеристики р-п перехода получим:

$$I = I_0 \left( \exp \frac{eU}{kT} - 1 \right).$$



При прямом подключении р-п перехода  $I \rightarrow I_0 \exp \frac{eU}{kT}$ , при обратном же  $I \rightarrow -I_0$ , т.е. *р-п переход обладает выпрямительными свойствами* (полупроводниковый **диод**).

Существование объемных зарядов приводит к появлению **барьерной емкости**  $C_{\text{бар}} = \varepsilon \varepsilon_0 S/x$ , где  $S$  – площадь р-п перехода,  $x$  – его толщина. При увеличении обратного напряжения ширина р-п перехода уменьшается, что приводит к увеличению емкости. На этом свойстве р-п перехода основано действие **варикапов**.

Кроме того, существует **диффузионная емкость**  $C_{\text{диф}} = \Delta Q/\Delta U$  при прямом подключении диода: инжектируемые электроны и дырки вносят в области р и п избыточный заряд, который исчезает за счет рекомбинации с основными носителями. Т.к. время рекомбинации  $\tau_{\text{рек}} \neq 0$ , то эти заряды существуют в течение некоторого времени в припереходной зоне. Из-за того, что эта зона очень тонкая, а накопленный заряд достаточно большой, диффузионная емкость велика.

## 43 Основы квантовой теории твердого тела

### Модели твердого тела. Квазичастицы

В **адиабатном приближении** ядра атомов считаются неподвижными, вокруг них двигаются электроны. Основная задача — определение энергетических состояний электронов. Адиабатное приближение используется лишь для расчета этих состояний.

Одним из основных результатов квантового подхода к исследованию свойств ТТ явилась концепция **квазичастиц**. Энергию возбужденного состояния кристалла можно представить как сумму энергий квазичастиц. Это позволяет ввести понятие газа квазичастиц и использовать представления кинетической теории газов.

Атомы ТТ при любой температуре совершают колебания около положения равновесия. Эти колебания вызывают звуковые волны в кристаллической решетке. Эти звуковые волны удобно описывать при помощи квазичастиц — **фононов** — квантов звуковых колебаний. Фононы являются бозонами.

В ТТ могут существовать как оптические, так и акустические фононы. При абсолютном нуле температуры возбуждаются только акустические фононы. ТТ можно рассматривать как емкость, внутри которой заключен фоновый газ. Фононы могут рождаться и исчезать в результате взаимодействия. Число фононов непостоянно и возрастает с ростом температуры.

При поглощении атомом света возможно образование водородоподобной пары электрон–дырка, которую называют **экситоном**. Энергия экситона меньше ширины запрещенной зоны, иначе электрон покинет атом. Экситоны легко возникают в диэлектриках (там велико притяжение между электронами и дырками). В полупроводниках энергия экситонов значительно ниже. В металлах же вероятность экситонного поглощения излучения практически нулевая.

## Электрон–фононный гамильтониан

**Электрон–фононное взаимодействие** — взаимодействие между двумя подсистемами квазичастиц в ТТ, а именно: носителями заряда (блоховскими электронами или дырками) и тепловыми колебаниями кристаллической решетки (фононами). Конкретный вид электрон–фононного гамильтониана зависит от структуры кристалла, числа носителей заряда, характера зонного спектра и особенностей колебания кристаллической решетки.

## Модель Блоха

Квантовомеханическая теория Блоха движения электрона в идеальной «замороженной» кристаллической решетке сводит сложную многоэлектронную проблему к задаче о движении отдельного электрона в строго периодическом потенциале, создаваемом узлами кристаллической решетки. Волновая функция Блоха представляет собой модулированную с периодом идеальной решетки плоскую волну:  $\psi_{nk}(\vec{x}) = u_{nk}(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\vec{x})$ , где  $n$  – дискретный номер энергетической зоны,  $\vec{k}$  – квазиволновой вектор, определенный с точностью до вектора обратной решетки  $\vec{K}$ . Если кристалл имеет ограниченные размеры, векторы  $\vec{k}$  будут квазидискретными.

Поведение электронов или дырок в кристалле имеет особенно простой вид на краю изотропных зон, когда возможно использование т.н. приближения эффективной массы:  $E_n(\vec{k}) \simeq E_n(0) + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ , величина  $\hbar\vec{k}$  является квазиимпульсом и законы ее сохранения выполняются лишь с точностью до  $\hbar\vec{K}$ .

Т.о., в строго периодическом поле кристалла электроны и дырки ведут себя как свободные заряженные частицы с эффективной массой  $m$ .

Методы описания колебаний кристаллической решетки основаны на разложении в ряд Тейлора потенциальной энергии решетки по степеням малых смещений  $\vec{u}_{nj}$  ионов из их положения равновесия:  $\vec{R}_{nj} = \vec{R}_{nj}^0 + \vec{u}_{nj}$ . Здесь  $\vec{n} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$  – вектор, определяющий положение элементарной ячейки в кристалле. Предполагается, что в кристалле  $N$  таких ячеек, в каждой расположено  $\nu$  ионов, положение которых определяется векторами  $\vec{j}$ .

Простейшее приближение является квадратичным, оно диагонализуется в нормальных координатах, что позволяет определить  $3\nu$  ветвей частот  $\omega_\alpha(\vec{k})$  и ортов, определяющих направление нормальных колебаний. В гармоническом приближении имеем дело с  $3\nu N$  независимыми гармоническими осцилляторами с энергией

$$H = U_0 + \sum_{\alpha\vec{k}} \hbar\omega_\alpha(\vec{k}) (a_{\alpha\vec{k}}^+ a_{\alpha\vec{k}} + 1/2),$$

где  $\alpha$  нумерует  $3\nu$  ветвей спектра колебаний решетки,  $\hbar\omega_\alpha(\vec{k})$  – энергия фо-

нона,  $a_{\vec{k}}^+$  и  $a_{\vec{k}}$  – амплитуды рождения и уничтожения фононов.

Гармоническое приближение не учитывает теплового расширения кристалла, т.к. среднее смещение ионов в нем равно нулю.

**Блоховское взаимодействие** – простейший вид электрон–фононного взаимодействия в металлах, согласно которому решетка металла рассматривается как статическое пространственно–периодическое поле  $V(\vec{x}) = V(\vec{x} + n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c})$ , а все электроны движутся независимо, подчиняясь уравнению Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_k(\vec{x}) + V(\vec{x})\psi_k(\vec{x}) = E_k\psi_k(\vec{x}),$$

где  $\psi_k(\vec{x})$  и  $E_k$  – собственное состояние и соответствующая собственная энергия электрона. Согласно Блоху, действующий на электрон потенциал в линейном по смещению ионов приближении равен

$$V_1(\vec{x}) \approx -\vec{u}(\vec{x})\nabla V(\vec{x}).$$

### Метод потенциала деформации Бардина–Шокли

Электрон–фононное взаимодействие в ковалентном полупроводнике можно найти, если считать концентрацию носителей заряда малой и пренебречь их взаимодействием между собой. Если в таком кристалле возникает небольшая статическая деформация, описываемая вектором смещения  $\vec{u}(\vec{x})$ , то соответствующий тензор деформации имеет компоненты:  $u_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)$ , зависящие от координаты  $\vec{x}$  элемента объема.

Обозначим  $E_0(\vec{k})$  зонную энергию электрона до деформации среды. В присутствии пространственно-неоднородной деформации энергия электрона приобретает плавную зависимость от  $\vec{x}$ :

$$E(\vec{k}, \vec{x}) = E_0(\vec{k}) + \mathfrak{C} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}),$$

при условии, что  $E_0$  имеет сферически-симметричный вид. Величина  $\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x})$  описывает относительное изменение объема системы, возникающее только при деформациях, обусловленных акустическими фононами.

**Гамильтониан электрон–фононного взаимодействия** примет вид:

$$H_{e-ph} = \int \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{+}(\vec{x}) \psi_{\sigma}(\vec{x}) \mathbf{e} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) dx,$$

где  $\sigma$  – спиновые индексы,  $\psi_{\sigma}^{+}(\vec{x})$  и  $\psi_{\sigma}(\vec{x})$  – электронные операторы рождения и уничтожения соответственно. Разложив гамильтониан по блоховским функциям с учетом того, что вклад в него дает лишь продольная фононная мода, получим:

$$H_{e-ph} = \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} \sum_{\sigma} A_{\vec{q}} \mathbf{e}_{\vec{k}'\sigma}^{+} \mathbf{e}_{\vec{k}\sigma} (a_{\vec{q}} - a_{\vec{q}}^{+}), \quad A_{-\vec{q}}^{+} = -A_{\vec{q}}.$$

Квазиволновые векторы электронов и фононов связаны между собой законами сохранения  $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$  для нормальных процессов рассеяния и  $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q} + \vec{K}$  для процессов переброса Пайерлса (в которых участвуют векторы обратной решетки).

Электрон–фононный гамильтониан описывает процессы рассеяния, при которых происходит уничтожение электрона и фонона с квазиимпульсами  $\hbar\vec{k}$  и  $\hbar\vec{q}$  соответственно и рождается электрон с квазиимпульсом  $\hbar\vec{k}'$ . Второй член гамильтониана описывает уничтожение электрона с квазиимпульсом  $\hbar\vec{k}$  и рождения электрон–фононной пары с квазиимпульсами  $\hbar\vec{k}'$  и  $-\hbar\vec{q}$  соответственно. Таким образом, реальной частицей является не свободный блоховский носитель заряда, а носитель, окруженный облаком продольных акустических фононов. Эта квазичастица называется **поляроном**.

Поляронная проводимость характерна для диэлектриков и ионных решеток. Поляроны делятся на два вида: ПБР (поляроны большого радиуса) характеризуются слабым взаимодействием с электронами, у ПМР (поляронов малого радиуса) такое взаимодействие значительно сильнее. ПМР перемещаются в кристалле за счет тепловых флуктуаций скачкообразно.

Процессы столкновения квазичастиц также характеризуются законом сохранения энергии:  $E(\vec{k}) - E(\vec{k}') \pm \hbar\omega_{\vec{q}} = 0$ .

## Модель Бардина–Пайнса

Простая модель Блоха для электрон–фононного взаимодействия в металле нуждается в уточнении ввиду значительной концентрации электронов проводимости и межэлектронного взаимодействия. Помимо экранирования кулоновского взаимодействия и замены закона  $1/r$  на  $\exp(-kr)/r$  существенно меняется величина матричных элементов электрон–фононного взаимодействия и характер закона дисперсии фононов.

Согласно модели Бардина–Пайнса, электроны проводимости движутся в непрерывной положительно заряженной среде и взаимодействуют как между собой по закону Кулона, так и с продольными фононами. Гамильтониан такой системы состоит из гамильтониана свободных блоховских электронов  $H_e^0$ , свободных фононов  $H_{ph}^0$  и двух слагаемых взаимодействия: электрон–фононного  $H_{e-ph}$  и электрон–электронного  $H_{e-e}$ :

$$H = H_e^0 + H_{ph}^0 + H_{e-ph} + H_{e-e}.$$

## Сверхпроводимость. Эффект Мейснера. Модель БКШ

**Сверхпроводимость** — явление, при котором наблюдается устойчивое к нарушениям решетки квантовое макроскопическое движение электронов. В нормальном состоянии этому движению препятствует колебание узлов кристаллической решетки, существенно увеличивающееся с ростом температуры.

Сверхпроводимость была обнаружена Камерлинг-Оннесом. Оказалось, что сопротивление большинства чистых металлов (кроме благородных, щелочноземельных и ферромагнитных) при снижении температуры плавно падает, и при достижении некоторой критической температуры  $T_C$  скачком обращается в нуль.

Сверхпроводники обладают следующими свойствами.

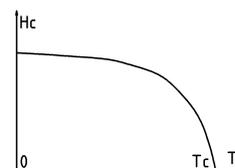
**Эффект Мейснера–Оксенфельда** (идеальный диамагнетизм) присущ всем сверхпроводникам. Действительно, т.к.  $\vec{E} = \rho\vec{j}$ , и т.к.  $j < \infty$ ,  $\rho = 0$ ,

то  $\vec{E} = 0$  и  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ , т.е. магнитная индукция внутри сверхпроводника постоянна и равна нулю (сверхпроводник вытесняет из себя МП).

Исчезновение МП связано с возникновением незатухающих поверхностных токов, которые создают внутри образца сверхпроводника МП, равное и противоположно направленное внешнему. МП проникает в сверхпроводник только в тонком приповерхностном слое, в котором и протекают экранирующие токи.

Из идеального диамагнетизма следует, что *ток не может протекать внутри сверхпроводника, а проходит только в тонком приповерхностном слое.*

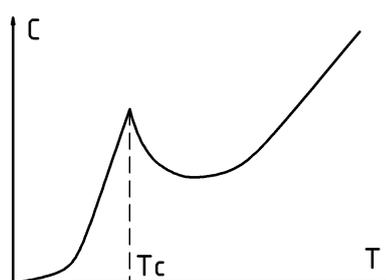
**Критическое МП.** Если напряженность внешнего МП превосходит некоторое критическое значение  $H_C$ , то сверхпроводник переходит в обычное состояние. При критической температуре  $H_C = 0$ , при приближении к абсолютному нулю  $H_C$  имеет полученную экспериментально зависимость:



$$H_C(T) = H_{C0} \left( 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \right).$$

По отношению к МП сверхпроводники делят на два рода: в сверхпроводники первого рода МП не проникает вплоть до достижения внешним полем критической величины; у сверхпроводников второго рода существует два значения критического поля:  $H_{C1}$  и  $H_{C2}$ . При  $H < H_{C1}$  МП не проникает в образец, при  $H_{C1} < H < H_{C2}$  поле проникает в образец в виде тонких вихревых нитей (т.е. происходит чередование нормальных и сверхпроводящих областей), а при  $H > H_{C2}$  образец теряет сверхпроводящие свойства. Смешанные состояния сверхпроводников второго рода называют **фазой Шубникова**.

**Изотопный эффект.** Критическая температура сверхпроводника зависит от массы изотопа:  $T_C \sim m^{-1/2}$ , где  $m$  — масса изотопа.



**Скачек теплоемкости.** У сверхпроводника теплоемкость зависит от температуры:  $C = AT^3 + BT$ , постоянная  $B$  описывает вклад электронов в теплоемкость. Т.о., при близких к абсолютному нулю температурах теплоемкость должна иметь прямую зависимость от температуры, однако, наблюда-

ется скачек теплоемкости вверх при  $T = T_C$ , а затем экспоненциальный спад до нуля. Такое поведение сверхпроводников означает, что *переход вещества в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом второго рода* и связан с коренными изменениями свойств электронов.

## Теория БКШ

Согласно теории БКШ (Бардин, Купер и Шриффер) микроскопический механизм сверхпроводимости характеризуется притяжением электронов вблизи поверхности Ферми.

Под действием электронов решетка поляризуется (атомы смещаются к электронам), вследствие такого смещения, вызванного одним электроном, второй электрон также сместится. Можно говорить о межэлектронном притяжении, осуществляемом посредством узлов кристаллической решетки.

При таком взаимодействии электроны обмениваются фононами, для них имеет место закон сохранения энергии. Электроны рассеиваются друг на друге. Если притяжение двух электронов превосходит кулоновское отталкивание, образуется электронная пара. Фононы, которыми обмениваются электроны, являются виртуальными, связанными с поляризацией решетки и не существующими независимо от электронов. Пара взаимодействующих электронов называется **куперовской парой**.

Т.к. критическая температура зависит от изотопной массы, то важную роль в сверхпроводимости играет динамика ионов, расположенных в узлах решетки.

Согласно принципу запрета Паули, взаимодействовать могут не все электроны, а лишь те, чья энергия лежит в узкой полосе около уровня Ферми. За

счет образования электронных пар суммарная энергия системы снижается.

Куперовские пары являются бозонами, т.к. взаимодействуют только электроны с противоположно направленными спинами. Т.о., происходит бозе-конденсация куперовских пар (все пары находятся в одинаковых состояниях).

## 44 Уравнения Максвелла

### Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла как обобщение экспериментальных данных

ЭП и МП связаны, они могут превращаться друг в друга, изменение МП вызывает изменение ЭП и наоборот. Эти свойства ЭМП были открыты Максвеллом.

ЭМП характеризуется четырьмя уравнениями Максвелла (УМ).

1. Теорема Гаусса:  $\oint_l E dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV, \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}.$

2. Теорема Гаусса для МП:  $\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i, I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$  Однако, МП создается не только током проводимости, но и током смещения  $\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$

3. Из второго закона ЭМИ,  $\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

4.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \Rightarrow \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0.$  Т.о.,  $\operatorname{div} \vec{B} = \text{const},$  т.е.  $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}.$

УМ связывают шесть величин — проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Заданными считаются  $\rho$  и  $\vec{j}$ .

## Сила Лоренца. Ток смещения

Уравнение непрерывности:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ . Из первого УМ  $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$ ,  $\Rightarrow$   

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\operatorname{div} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0.$$

Следовательно, линии полного тока  $\vec{j}_{\text{полн}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$  всегда замкнуты. Ток  $\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  называется **током смещения**.

В ЭМП на проводники действует **сила Ампера**  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$ , где  $l$  – длина проводника. Т.к.  $\vec{l}$  и  $\vec{v}$  коллинеарны, можно написать:  $I \vec{l} = Nq\vec{v}$ . Следовательно, на один электрон действует сила  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Если к действию МП добавляется ЭП, результирующая сила называется **силой Лоренца** и равна  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ .

## Вихревое электрическое поле

Т.к.  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , то любое изменение МП вызывает вихревое ЭП. Это поле не является электростатическим, т.к. у последнего силовые линии всегда разомкнуты. Т.о., появляется ЭП, связанное с МП аналогично тому, как вокруг проводника с током появляется вихревое МП.

## Взаимное превращение электрического и магнитного полей

Магнитное поле имеет релятивистскую природу. Связь МП и ЭП определяется уравнениями преобразования (штрихом отмечена движущаяся система):

$$E_x = E'_x; \quad B_x = X'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E_z = \frac{E'_z - v B'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Т.о., если в движущейся системе существует ЭП, то в неподвижной будет наблюдаться еще и МП.

## Уравнения Максвелла в интегральном виде

Проинтегрировав дифференциальные УМ, получим:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \oint_l \vec{H} d\vec{l} = \vec{j}_{\text{макро}} + \vec{j}_{\text{смещ}};$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

## Волновое уравнение. ЭМВ в вакууме

Т.к.  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , можно ввести векторный потенциал  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ :

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ ,  $\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$ . Т.к.  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ ,

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Введем калибровку по Лоренцу (положим равным нулю выражение при градиенте). Тогда получим совокупность **волновых уравнений** (уравнений д'Аламбера):

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}; \quad \Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Они описывают движение электромагнитной волны в пространстве. Гармонические колебания ЭМВ описываются уравнениями  $E = E_0 \sin[\omega(t - x/v)]$  и  $H = H_0 \sin[\omega(t - x/v)]$ . Колебания  $H$  и  $E$  синфазны.

Длина волны  $\lambda = vt$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число, т.о.  $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$ .

Т.к. в вакууме отсутствуют токи и объемные заряды, то волновые уравнения примут вид:

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Величина  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ , где  $c$  – скорость распространения ЭМВ в вакууме (**скорость света**), тогда:

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}; \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

## Поперечность ЭМВ. Вектор Умова–Пойнтинга

ЭМВ поперечны: вектора  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны. Плоскость, в которой колеблется вектор  $\vec{E}$ , называется **плоскостью поляризации**.

Энергия ЭМВ  $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$ . Т.к.  $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ ,  $\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , получим:  $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$  или:  $w_E = w_H$ , т.е. *энергии магнитного и электрического поля в ЭМВ равны*. Тогда

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E H = \frac{E H}{c}.$$

Вектор плотности потока энергии ЭМВ называется **вектором Умова–Пойнтинга**:

$$\vec{P} = w \vec{c} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

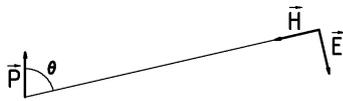
## Вибратор Герца. Электрическое дипольное излучение

Простейшим излучателем ЭМВ является **вибратор Герца** и рамка с током. Вибратор герца (элементарный вибратор) — это совокупность двух металли-

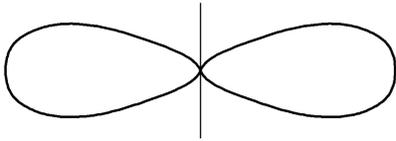
ческих шариков, соединенных проводником. Если шарики зарядить противоположно, то они начинают перезаряжаться, излучая ЭМВ.

Рассмотрим излучение системы неподвижного заряда  $+q$  и колеблющегося около него по гармоническому закону заряда  $-q$ . Дипольный момент системы  $\vec{p} = -q\vec{r} = \vec{p}_m \cos \omega t$ . Пусть амплитуда колебаний  $l \ll \lambda$ .

В каждой точке пространства  $E$  и  $H$  будут изменяться по гармоническому закону  $\propto \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ . Амплитуды колебания  $E$  и  $H$  убывают по закону  $\propto \frac{1}{r} \sin \theta$ , где  $\theta$  – угол между  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ . Мощность излучения  $\langle P \rangle \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$ .



**Диаграмма направленности** излучения элементарного вибратора изображена на рисунке слева. Мощность излучения определяется выражением:



$$P \propto \ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t; \quad \langle P \rangle \propto p_m^2 \omega^4.$$

Следовательно, при малых  $\omega$  излучение незначительно. Т.к.  $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -q\vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – ускорение движущегося заряда, то мощность  $\langle P \rangle \propto q^2 \vec{a}^2$ . Т.о., если электрон движется в среде равномерно, он не излучает ЭМВ. Излучение появляется лишь в случае ускоренного движения электрона (торможение, движение по окружности, ускорение).

## 45 Релятивистская динамика и кинематика.

### Четырехмерный формализм

#### Преобразования Лоренца

Согласно специальной теории относительности, скорость света  $c < \infty$ . Скорость тела и время связаны между собой. Пусть тело движется вдоль оси  $X$  со скоростью  $V$ . **Преобразования Лоренца:**

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Согласно преобразованиям Лоренца, при переходе между СК меняются не только пространственные координаты, но и время.

Однако, существует инвариант:  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$  — **релятивистский интервал**.

Размеры движущихся тел сокращаются (**лоренцево сокращение**):  $l = x_2(t) - x_1(t) = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Поперечные размеры при этом остаются прежними.

**Собственное время**  $\tau_0$  — время в собственной СК.  $\tau = \tau_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т.е. в движущейся СК время протекает медленнее.

Выделяют два типа интервала: при  $s^2 > 0$  интервал называют **пространственно-подобным**, при  $s^2 < 0$  — **временеподобным**.

Из преобразований Лоренца следуют преобразования:

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v'_{y',z'} = \frac{v_{y,z}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}};$$

$$v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 - \frac{Vv'_{x'}}{c^2}}, \quad v_{y,z} = \frac{v'_{y',z'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv'_{x'}}{c^2}};$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

## Формализм Минковского

Для более полного отражения связи времени и пространства удобно ввести четвертую координату  $x_4 = ict$ . Тогда преобразования Лоренца можно задать

в тензорном виде:  $\hat{X}' = \hat{K}\hat{X}$ , где  $\hat{X}$  и  $\hat{X}'$  – **четырёхвекторы координат**,

$$\hat{K} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}.$$

И обратно:  $\hat{X} = \hat{K}'\hat{X}'$ . Т.к.  $\hat{K}\hat{K}' = \hat{I}$ ,  $\hat{K}'$  получается из  $\hat{K}$  заменой координат  $K_{\alpha\beta} \rightarrow K'_{\beta\alpha}$ . Следовательно, интервал также будет обычным четырёхвектором.

Пусть  $u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$ , тогда  $\hat{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  – четырёхвектор скорости.  
 $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ ,  $\Rightarrow u_{1,2,3} = \frac{u_{x,y,z}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ ,  $u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ ,  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ .

*Квадрат четырёхвектора скорости равен  $-c^2$ .*

Тензорный вид преобразований Лоренца справедлив и для четырёхвектора скорости:  $\hat{U}' = \hat{K}\hat{U}$ .

## Ковариантная запись закона сохранения заряда и уравнений для потенциалов

Инвариантами являются **четырёхмерные дивергенция, градиент и ротор**:

$$\operatorname{div} \hat{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}; \quad \widehat{\operatorname{grad}} \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right).$$

Удобно ввести **четырёхмерный оператор набла**:

$$\widehat{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

тогда  $\operatorname{div} \hat{A} = \widehat{\nabla} \hat{A}$ ,  $\widehat{\operatorname{grad}} \varphi = \widehat{\nabla} \varphi$ ,  $\operatorname{rot} \hat{A} = \{\widehat{\nabla} \times \hat{A}\}$  (будем обозначать **тензорное произведение векторов** как  $\{\hat{A} \times \hat{B}\}$ ). Оператор четырёх-ротора

будет являться тензором, его компоненты:  $(\operatorname{rot} \hat{A})_{ij} = \frac{\partial \hat{A}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial x_j}$ .

Преобразуем теперь в четырехмерный вид уравнения, выражающие закон сохранения энергии,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \rho \vec{v} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

условие Лоренца и уравнение непрерывности,

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Условие Лоренца легко преобразовать, если ввести **четырёхмерный векторный потенциал**:  $\hat{\Phi} = (A_x, A_y, A_z, \frac{i\varphi}{c})$ . Тогда оно примет вид:  $\boxed{\operatorname{div} \hat{\Phi} = 0}$ , или  $\hat{\nabla} \hat{\Phi} = 0$ .

Введем теперь **четырёхвектор плотности тока**  $\hat{S} = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$ . Если подействовать оператором четырех-дивергенции на четырех-градиент, получим **оператор д'Аламбера**:  $\boxed{\square = \hat{\nabla}^2}$ . Этот оператор, также как и градиент, дивергенция и ротор, является инвариантом в пространстве Минковского. Волновое уравнение примет вид  $\boxed{\square \hat{\Phi} = -\mu_0 \hat{S}}$ . И, наконец, уравнение непрерывности:  $\boxed{\operatorname{div} \hat{S} = 0}$ , или  $\hat{\nabla} \hat{S} = 0$ .

Пусть в штрихованной СК  $K'$  заряд покоится и его плотность равна  $\rho_0$ . Тогда  $\hat{S}' = (0, 0, 0, ic\rho_0)$ , а в движущейся СК:  $\hat{S} = (\gamma\rho_0 v, 0, 0, \gamma ic\rho_0)$ , где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Следовательно, в подвижной СК плотность заряда возрастает в  $\gamma$  раз по сравнению с неподвижной СК.

Т.к. элемент объема  $dV = dV_0/\gamma$ , то  $dq = \rho dV = \rho_0 dV_0 = dq_0$ : *заряд является еще одним инвариантом в пространстве Минковского* (закон сохранения заряда:  $\boxed{dq' = dq}$ ). Тогда можно записать:  $\boxed{\hat{S} = \rho_0 \hat{U}}$ , где  $\hat{U}$  – четырех-скорость.

## Тензор энергии–импульса электромагнитного поля

Выразим в четырехмерном виде уравнения  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  и  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Получим:  $E_{x,y,z} = ic \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_4}{\partial x_{1,2,3}} - \frac{\partial \hat{\Phi}_{1,2,3}}{\partial x_4} \right)$ ,  $B_{x,y,z} = \frac{\partial \hat{\Phi}_{3,1,2}}{\partial x_{2,3,1}} - \frac{\partial \hat{\Phi}_{2,3,1}}{\partial x_{3,1,2}}$ . Совокупность

этих уравнений удобно представить в виде тензора  $\hat{H}_{\mu\nu} = c\left(\frac{\partial\hat{\Phi}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\hat{\Phi}_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ :

$\hat{H} = c \operatorname{rot} \hat{\Phi} = c\{\widehat{\nabla} \times \hat{\Phi}\}$ . Компоненты тензора  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем также тензор  $\hat{F}$ :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно получить преобразования  $\hat{H}$  и  $\hat{F}$  между СК. Пусть тензор  $\hat{T} = \{\hat{A} \times \hat{B}\}$  — тензорное произведение векторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . Тогда  $\hat{T}' = \{\hat{A}' \times \hat{B}'\} = \{(\hat{K}\hat{A}) \times (\hat{K}\hat{B})\}$ ,  $\Rightarrow \hat{T}'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} \hat{K}_{\alpha\mu} \hat{K}_{\beta\nu} \hat{T}_{\mu\nu}$ .

**Сила Лоренца**  $\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  в пространстве Минковского примет вид  $\hat{f}_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} S_\nu$ , что позволяет записать:  $\hat{f} = \frac{1}{c} \hat{H} \hat{S}$ .  $\vec{F} = \int \vec{f} dV$ .

Пусть  $\widehat{dV} = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ .  $\widehat{dV}' = |D| \widehat{dV}$ , где  $D_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha}$  — якобиан (определитель) преобразования координат. Т.к.  $|D| = 1$ , получим:  $\widehat{dV}' = \widehat{dV}$ , т.е. *четырёхмерный объём инвариантен в пространстве Минковского*.

Аналогичными инвариантами являются *четырёх-импульс*  $\widehat{dP}_\nu = f_\nu dx_1 dx_2 dx_3 dt$  и *четырёх-сила*  $\hat{K}_\nu = \int \frac{dP_\nu}{d\tau} = \int f_\nu \gamma dV$ ,  $\hat{K} = (\gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z, \gamma^i e \vec{v} \vec{E})$ .

Плотность энергии ЭМП  $w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$ , вектор Умова  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  и импульс ЭМП  $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$  можно также представить в виде одного четырёх-

рехмерного тензора энергии–импульса:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & w \end{pmatrix},$$

где  $T_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} H_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \delta_{\mu\nu} \frac{1}{4c} \sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}$ . Главная диагональ тензора энергии–импульса является тензором натяжений, характеризующая поверхностные силы.

## Ковариантная запись уравнений Максвелла. Инварианты магнитного поля

$$\text{rot } \vec{H} = \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho.$$

$$0 + \frac{\partial H_z}{\partial x_2} - \frac{\partial H_y}{\partial x_3} - \frac{\partial(icD_x)}{\partial x_4} = \rho v_x; \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial H_x}{\partial x_3} - \frac{\partial(icD_y)}{\partial x_4} = \rho v_y;$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x_1} - \frac{\partial H_x}{\partial x_2} + 0 - \frac{\partial(icD_z)}{\partial x_4} = \rho v_z; \quad \frac{\partial(icD_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(icD_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial(icD_z)}{\partial x_3} + 0 = ic\rho.$$

Эти уравнения удобно записать с помощью тензора  $\hat{F}$ :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \hat{F}_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = S_{\mu}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

$$\frac{\partial(cB_x)}{\partial x_4} + \frac{\partial(-iE_z)}{\partial x_2} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial(-iE_z)}{\partial x_1} + \frac{\partial(iE_x)}{\partial x_3} + \frac{\partial(-cB_y)}{\partial x_4} = 0;$$

$$\frac{\partial(iE_x)}{\partial x_2} + \frac{\partial(cB_z)}{\partial x_4} + \frac{\partial(-iE_y)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial(cB_z)}{\partial x_3} + \frac{\partial(cB_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(cB_y)}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь удобно использовать тензор  $\hat{H}$ :

$$\frac{\partial \hat{H}_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial \hat{H}_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \hat{H}_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \mu \neq \nu \neq \lambda.$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu}^{(0)} = \varepsilon_0 \sum_{\nu} \hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu}^{(0)};$$

$$\frac{1}{c} (\hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda}^{(0)} + \hat{H}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu}^{(0)} + \hat{H}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}^{(0)}) = \mu_0 (\hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda}^{(0)} + \hat{F}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu}^{(0)} + \hat{F}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}^{(0)}).$$

Здесь  $\hat{U}^{(0)} = (0, 0, 0, ic)$  – скорость покоящейся СК.

Однако, эти уравнения справедливы и для любой ненулевой скорости:

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu} = \varepsilon_0 \sum_{\nu} \hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu};$$

$$\frac{1}{c} (\hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda} + \hat{H}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu} + \hat{H}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}) = \mu_0 (\hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda} + \hat{F}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu} + \hat{F}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}).$$

Таким образом, получим *связь электрического и магнитного полей*:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} = \varepsilon_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

$$\vec{B} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}).$$

Преобразование этих величин между СК:  $E'_{x'} = E_x$ ,  $E'_{y'} = \gamma(E_y - vB_z)$ ,  $E'_{z'} = \gamma(E_z + vB_y)$  (аналогично для  $\vec{D}$ ).  $B'_{x'} = B_x$ ,  $B'_{y'} = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z)$ ,  $B'_{z'} = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y)$  (аналогично для  $\vec{H}$ ).

Преобразования между СК удобно записывать в векторном виде для проекций векторов на вектор скорости ( $\vec{X}_{\parallel}$ ) и перпендикулярно ему ( $\vec{X}_{\perp}$ ):  $\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}$ ,  $\vec{D}'_{\perp} = \gamma(\vec{D} + \vec{v} \times \vec{H}/c^2)_{\perp}$  (аналогично для  $\vec{E}$ ).  $\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}$ ,  $\vec{H}'_{\perp} = \gamma(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D})_{\perp}$  (аналогично для  $\vec{B}$ ).

Получим следующие инварианты:

$$\boxed{I_1 = c^2 B^2 - E^2}, \quad \boxed{I'_1 = H^2 - c^2 D^2};$$

$$\boxed{I_2 = \vec{B} \vec{E}}, \quad \boxed{I'_2 = \vec{H} \vec{D}};$$

$$\boxed{I_3 = \vec{H} \vec{B} - \vec{D} \vec{E}}.$$

**Следствия:**

1. если  $c^2 B^2 > E^2$  и  $\vec{B} \perp \vec{E}$ , то возможно выбрать СК, в которой ЭП равно нулю при ненулевом МП ( $E = 0$  при  $H \neq 0$ ), если же вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  не перпендикулярны, такой СК не существует;

2. если  $c^2 B^2 < E^2$  и  $\vec{B} \perp \vec{E}$ , то существует СК, в которой отсутствует МП при ненулевом ЭП, однако, если МП и ЭП не перпендикулярны, такой СК не существует;
3. если в какой-либо СК существует только ЭП или только МП, то при переходе к другой СК возможно существование как ЭП, так и МП, причем эти поля будут перпендикулярны друг другу;
4. если  $c^2 B^2 = E^2$  и  $\vec{B} \perp \vec{E}$ , то данная волна будет оставаться плоской во всех СК.

## 46 Электродинамика движущихся сред

### Материальные уравнения для движущихся сред

Необходимо сформулировать уравнения Максвелла (УМ) для движущихся сред. Для этого нужно записать известные для неподвижных сред УМ в ковариантном виде (в виде тензорных уравнений). Кроме того, т.к. известны формулы преобразования тензоров при смене СК, легко получить преобразования векторов поля.

УМ в вакууме пригодны и для описания полей в других средах, если умножить их на  $\varepsilon$  и  $\mu$ :

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = S_\mu; \quad \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0;$$

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} U_\nu = \varepsilon \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} U_\nu;$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu\nu} U_\lambda + H_{\nu\lambda} U_\mu + H_{\lambda\mu} U_\nu) = \mu_0 \mu (F_{\mu\nu} U_\lambda + F_{\nu\lambda} U_\mu + F_{\lambda\mu} U_\nu).$$

Здесь  $U = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma ic)$  — четырехвектор скорости;  $\gamma = (1 -$

$v^2/c^2)^{-1/2}$ ;  $S = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$  — четырех-плотность тока;

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Материальные уравнения можно записать и так:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = \mu\mu_0(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}).$$

## Законы преобразования $\vec{E}$ , $\vec{H}$ , $\vec{B}$ , $\vec{D}$ , $\vec{P}$ , $\vec{M}$

При переходе от одной СК к другой тензоры преобразуются по формуле:

$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\gamma} a_{\mu\gamma} a_{\nu\gamma} F_{\alpha\gamma}$ , где  $\hat{a}$  — матрица перехода:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим следующие формулы.

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x, & E'_{y'} &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_{z'} &= \gamma(E_z + vB_y); \\ D'_{x'} &= D_x, & D'_{y'} &= \gamma(D_y - \frac{v}{c^2}H_z), & D'_{z'} &= \gamma(D_z + \frac{v}{c^2}H_y); \\ B'_{x'} &= B_x, & B'_{y'} &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_{z'} &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y); \\ H'_{x'} &= H_x, & H'_{y'} &= \gamma(H_y + vD_z), & H'_{z'} &= \gamma(H_z - vD_y). \end{aligned}$$

Инварианты:  $I_1 = c^2B^2 - E^2$ ,  $I'_1 = H^2 - c^2D^2$ ,  $I_2 = \vec{B}\vec{E}$ ,  $I'_2 = \vec{H}\vec{D}$ ,  $I_3 = \vec{H}\vec{B} - \vec{D}\vec{E}$ .

Т.к. при  $v = 0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0(\vec{E} + \vec{P})$ ,  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , получим формулы для поляризованности и намагниченности:

$$\begin{aligned} P'_{x'} &= P_x, & P'_{y'} &= \gamma(P_y + \frac{v}{c^2}M_z), & P'_{z'} &= \gamma(P_z - \frac{v}{c^2}M_y); \\ M'_{x'} &= M_x, & M'_{y'} &= \gamma(M_y - vP_z), & M'_{z'} &= \gamma(M_z + vP_y). \end{aligned}$$

## Основные уравнения электродинамики медленно движущихся проводников

Четырехвектор тока:  $\hat{S} = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$ . Пусть в СК  $K'$  заряд неподвижен:  $\hat{S}' = (0, 0, 0, ic\rho')$ . Преобразуя, получим:  $\hat{S} = \hat{a}\hat{S}' \Rightarrow \hat{S} = (\gamma\rho'v, 0, 0, \gamma ic\rho')$ . Т.о., как и ожидалось, движение заряда порождает электрический ток  $j_x = \gamma\rho'v$ .

Рассмотрим теперь движущийся проводник с током: в  $K'$  имеется ток проводимости, но отсутствует плотность заряда:  $\hat{S}' = (j'_x, j'_y, j'_z, 0)$ , тогда в СК  $K$  появится плотность заряда:  $\hat{S} = (\gamma j'_x, \gamma j'_y, \gamma j'_z, \gamma i j'_x v/c)$ ,  $\Rightarrow \rho = j_x v/c^2$  или  $\rho = \vec{v}\vec{j}/c^2$ . Однако, согласно закона сохранения заряда,  $\rho dV = \vec{v}/c^2 \int \vec{j} dV = 0$ . Т.о., возникновение объемной плотности заряда в движущемся проводнике — релятивистский эффект, объясняющийся тем, что ионы кристаллической решетки неподвижны относительно проводника, а электроны движутся.

Движущаяся рамка с током приобретает дипольный момент, т.к. разные ее стороны приобретают разные по знаку заряды.  $p = vIl/c^2 = vIS/c^2 = vp_m/c^2$ , или  $\vec{p} = \vec{v} \times \vec{p}_m/c^2$ . Т.о., при движении магнитный момент порождает электрический. Этот факт объясняет появление тонкой структуры у излучающих атомов.

Закон Ома можно записать в тензорной форме по аналогии:  $\vec{j} = \alpha\vec{E}$ ,  $S_\mu = \alpha/c \sum_\nu H_{\mu\nu} U_\nu$  или  $\hat{S} = \hat{H}\hat{U}$ . Это уравнение можно разложить на два:  $\vec{j} = \gamma\alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  и  $\rho = \vec{j}\vec{v}/c^2$ .

## Основные уравнения магнитной гидродинамики в идеальной проводящей жидкости

Если проводящая жидкая (или газообразная) среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамических движениях в этой среде индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут существенно повлиять на движение жидкости. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле. Т.о., возникает сложная картина магнитных и гидродинамических явлений, кото-

рая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости.

В качестве уравнений поля в движущейся проводящей среде мы будем пользоваться уравнениями

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) = \frac{c^2 \Delta H}{4\pi\sigma\mu}, \quad \text{div } H = 0.$$

Магнитная проницаемость сред, о которых может идти речь в магнитной гидродинамике, мало отличается от единицы, и это отличие не имеет значения для изучаемых здесь явлений. Поэтому будем полагать  $\mu = 1$ . Т.о., имеем уравнения

$$\text{div } H = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) + \frac{c^2 \Delta H}{4\pi\sigma}.$$

Гидродинамические уравнения содержат, прежде всего, уравнение непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  и уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta \Delta v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho},$$

где  $\eta, \xi$  – два коэффициента вязкости жидкости, а  $f$  – объемная плотность сторонних, в данном случае электромагнитных, сил. Имеем  $\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H}$ . Т.о., уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{H} \times \text{rot } \vec{H} + \frac{\eta \Delta v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}.$$

К этим уравнениям надо еще присоединить уравнение состояния  $p = p(\rho, T)$ , связывающее между собой давление, плотность и температуру жидкости, и уравнение переноса тепла. В «обычной» гидродинамике последнее имеет вид:

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\chi \nabla T).$$

Здесь  $s$  – энтропия единицы массы жидкости, выражение в левой стороне равенства представляет собой количество тепла (отнесенное к ед. объема), выделяющееся за ед. времени в движущемся элементе жидкости. Выражение

в правой стороне равенства есть энергия, диссипируемая в том же объеме за ед. времени.

Уравнение переноса тепла в магнитной гидродинамике:

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\chi \nabla T) + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} (\operatorname{rot} \vec{H})^2.$$

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} q.$$

## 47 Плоские электромагнитные волны в прозрачном веществе

**Волновое уравнение. Скорость света в однородных изотропных телах**

**Электромагнитные волны** (ЭМВ) — возмущения ЭМП (т.е. переменное ЭМП), распространяющиеся в пространстве. Утверждение о существовании ЭМВ следует из уравнений Максвелла для ЭМП вдали от свободных электрических зарядов и макротоков:  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ;  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ ;  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  — и материальных уравнений:  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ;  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  (в однородных изотропных средах). Следовательно,  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ ;  $\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ;  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ;  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ .

Тогда  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ . Т.к.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ , а  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho = 0$ , получим **волновое уравнение**:

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}, \quad \boxed{\Delta \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0},$$

$\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 = 1/v^2$ , где  $v$  — скорость распространения ЭМВ.  $v = c(\varepsilon \mu)^{-1/2}$ , где  $c$  — скорость распространения ЭМВ в вакууме (**скорость света**),  $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ . Т.к. у диэлектриков  $\mu \sim 1$ , записывают  $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ .

ЭМВ являются плоскими, т.е. у них  $\vec{E}\vec{H} = 0$ ,  $\vec{E}\vec{v} = 0$ ,  $\vec{H}\vec{v} = 0$ . Напряженности ЭП и МП в ЭМВ связаны:  $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$ .

## Плотность энергии и импульса ЭМВ. Вектор Умова–Пойнтинга

В линейной изотропной среде плотность энергии ЭМВ  $w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0H^2$ , или:

$$w = \varepsilon\varepsilon_0E^2 = \mu\mu_0H^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}EH.$$

В случае плоской линейно поляризованной волны  $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})$  ( $\vec{k} = 2\pi/\lambda$ ),  $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})$ ,  $\Rightarrow w = \varepsilon\varepsilon_0E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k}\vec{x})$ ;  $\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2$ . Для произвольно поляризованного излучения  $\vec{E} = \vec{E}_1 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{x}) + \vec{E}_2 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{x} + \varphi)$ ,  $\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0(E_1^2 + E_2^2)$ .

**Вектором Умова–Пойнтинга** называют вектор плотности потока энергии ЭМВ:

$$\boxed{\vec{P} = \omega\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H}}.$$

Для линейно поляризованной волны  $P = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2 \sin^2(\omega t - kx)$ .

**Интенсивность** ЭМВ  $I = |\langle \vec{P} \rangle| = \langle w \rangle v$ . Под интенсивностью света обычно понимают  $E^2$ . Для линейно поляризованных волн  $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2$ , для эллиптически поляризованных:  $I = I_x + I_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}(E_1^2 + E_2^2)$ .

## Плотность импульса ЭМВ. Давление света. опыты Лебедева

На объем  $V$  со стороны ЭМП действует сила  $\vec{F} = \int_V \vec{f} dV$ , где  $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$  –

**плотность силы Лоренца**. Уравнения Максвелла:  $\rho\vec{v} = \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ,  $\rho = \text{div } \vec{D}$ ,  $\Rightarrow$

$$\vec{f} = \vec{E} \text{div } \vec{D} + (\text{rot } \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}.$$

Т.к.  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  и  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,  $\Rightarrow$

$$\vec{f} = \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}),$$

$$f_x = \operatorname{div} \Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B})_x,$$

$$\Phi_x = D_x E_x + H_x B_x - \frac{\vec{D} \vec{E} + \vec{H} \vec{B}}{2}, \quad \Phi_y = D_y E_y + H_y B_y, \quad \Phi_z = D_z E_z + H_z B_z.$$

Т.к.  $\vec{D} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}/c^2$ , получим:

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \Phi dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{G}^{\text{част}}}{dT},$$

где  $\vec{G}^{\text{част}}$  – импульс частиц в объеме  $V$ ,  $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left( G_x^{\text{част}} + \int \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV \right) = \int_S \Phi dS \equiv F_x^{\text{пов}}.$$

Импульс ЭМП:  $G_x = \int \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV$ ,  $\vec{G} = \int_V \vec{g} dV$ , где  $\vec{g}$  – **плотность импульса ЭМП**,  $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H} = \vec{P}/c^2$ .

Таким образом, можно вычислить давление, оказываемое ЭМП при нормальном падении на некоторую поверхность:  $p = cg = EH/c = \varepsilon_0 E^2 = w$ . Согласно теории Максвелла,  $p = I(1 + R) \cos^2 i/v = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i$ , где  $R$  – коэффициент отражения,  $i$  – угол падения ЭМВ.

### Опыты Лебедева:

1. Исследование прохождения ЭМВ с длиной волны  $\lambda = 6$  мм в кристаллах (результат опыта: открытие двойного лучепреломления ЭМВ).
2. Измерение светового давления на твердые тела и газы (результат: подтверждение теории Максвелла).

## Поглощение электромагнитных волн

**Поглощение света** — явление уменьшения энергии ЭМВ при ее распространении в веществе (вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества, либо в энергию вторичного излучения).

**Закон Бугера–Ламберта:** интенсивность прошедшего через слой вещества толщиной  $x$  изменяется по закону  $I = I_0 \exp(-a'x)$ , где  $a'$  — **натуральный показатель поглощения среды**. Для разбавленных растворов справедлив **закон Бэра:**  $a' = bc$ , где  $c$  — концентрация раствора. В сильно концентрированных растворах закон Бэра нарушается вследствие взаимодействия молекул вещества.

Согласно закону Бугера–Ламберта,  $E = E_0 \exp(-\frac{1}{2}a'x) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{x})$ , или  $E = E_0 \exp(i\omega[t - \tilde{n}x/c])$ . Величину  $\tilde{n} = n - i\kappa$  называют **комплексным показателем преломления** вещества,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  — **показатель преломления**,  $\kappa = \frac{a'c}{2\omega} = \frac{a'\lambda_0}{4\pi}$  — **главный показатель поглощения**,  $\lambda_0 = n\lambda$  — длина волны света в вакууме.

## Модулирование волны. Волновые пучки и пакеты

**Модуляция** — изменение по какому-либо закону одного из параметров периодического колебания (амплитуды, частоты или фазы).

**Амплитудная модуляция:**  $A = A_0 b(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $A$  — напряженность магнитного, либо электрического поля в волне.  $b(t)$  — закон модуляции волны. Если  $b(t) = b_0 \cos \Omega t$ , то такую волну можно характеризовать как суперпозицию трех волн с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_0 \pm \Omega$ . Волну с частотой  $\omega$  называют **несущей**, а  $\omega_0 \pm \Omega$  — боковыми составляющими.

**Частотная модуляция:**  $A = A_0 \sin(\omega_0[1 + b(t)]t + \varphi_0)$ ,  $b(t) < 1$ ,  $\Omega \ll \omega_0$ . При гармоническом законе модуляции  $A = A_0 \sin(\omega_0[1 + b_0 \cos \Omega t]t + \varphi_0)$ .

**Фазовая модуляция:**  $A = A_0 \sin(\omega_0 t + b(t))$ ,  $b(t) = \Delta\varphi \cos \Omega t$ ,  $\Omega \ll \omega_0$ .

В общем случае могут сочетаться разные виды модуляции (например, биения).

**Волновой пакет** — суперпозиция волн, с частотами, мало отличающимися друг от друга (от  $\omega_0 - \Delta\omega/2$  и до  $\omega_0 + \Delta\omega/2$ , где  $\Delta\omega$  — **ширина волнового пакета**):

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_\omega) d\omega.$$

Согласно принципу суперпозиции волн и основам Фурье-анализа, любую несинусоидальную волну можно заменить суммой синусоидальных, эквивалентной ей, т.е. представить волну в виде группы волн (волнового пакета). Совокупность частот данного волнового пакета называется **спектром частот** рассматриваемой несинусоидальной волны.

Простейшей группой волн является квазисинусоидальная плоская волна, получающаяся в результате суммирования двух распространяющихся вдоль оси  $X$  волн с равными амплитудами и близкими частотами:

$$A = A_0[\sin(\omega t - kx) + \sin((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)] = 2A_0 \cos \frac{1}{2}(t d\omega - x dk) \sin(\omega t - kx).$$

Эта волна характеризуется переменной амплитудой  $A_1 = 2A_0 \cos \frac{1}{2}(t d\omega - x dk)$ , медленно изменяющейся с изменением времени и расстояния.

За **скорость распространения** несинусоидальной волны принимают скорость перемещения точки  $M$  с фиксированной амплитудой, т.е. из условия  $A_1 = \text{const}$ , получим:  $t d\omega - x dk = \text{const}$ ,  $\Rightarrow u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$  — **групповая скорость**, в отличие от **фазовой скорости**:  $v = \omega/k$ . Групповая и фазовая скорости связаны между собой: 
$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

## Монохромные и квазимонохромные волны.

**Монохромная световая волна** — ЭМВ одной определенной частоты  $\omega$ , т.е. синусоидальная ЭМВ. Т.о., **квазимонохромной** можно назвать квазисинусоидальную волну — волновой пакет.

Если ширина волнового пакета  $\Delta\omega$  значительно меньше основной частоты  $\omega_0$ , волну называют **узкополосной**. Соответственно, при  $\Delta\omega \gtrsim \omega_0$  ее называют **широкополосной**.

## Фурье–анализ и Фурье–синтез волновых полей

Рассмотрим комплексную амплитуду плоской волны  $E = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ , удовлетворяющую **уравнению Гельмгольца**:  $\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0$  ( $k = \omega/c$ ). Найдем решение уравнения, удовлетворяющее ГУ  $\mathcal{E}(x, y, z)|_{x=y=z=0} = \mathcal{E}_0(x, y)$ , волна распространяется вдоль оси  $OZ$ .

Разложим двумерное поле  $\mathcal{E}_0(x, y)$  в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp(-i[k_x x + k_y y]) dk_x dk_y.$$

Из уравнения Гельмгольца  $\mathcal{E}(k_x, k_y, z) = \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp(-iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})$  получим:

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y') H(x - x', y - y', z) dx' dy',$$

где  $H(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k_x x + k_y y + z\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})] dk_x dk_y$  — **функция Грина**. Если световой пучек расходится слабо, т.е.  $k_x^2 \ll k^2$  и  $k_y^2 \ll k^2$ , то  $H = \frac{i}{\lambda z} \exp(-ik[z + \frac{1}{2z}\{x^2 + y^2\}])$ , тогда

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y') \exp\left(-\frac{ik}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right) dx' dy'.$$

Таким образом, *волновая картина в любом участке преобразования является преобразованием Фурье начальной плоской волны*. Преобразователем Фурье можно выбрать, например, линзу — распределение света в ее фокальной плоскости приобретает форму **пространственного спектра** поля, падающего на линзу (**Фурье–анализ изображения**). Так получают Фурье–спектры оптических изображений.

Можно провести и обратную операцию — **Фурье–синтез** изображения. При построении объекта линзой мы сначала проводим Фурье–анализ объекта (область от линзы до ее фокальной плоскости), получая в задней фокальной

плоскости Фурье–образ поля, испущенного объектом, затем в пространстве между задней фокальной плоскостью и плоскостью изображения происходит Фурье–синтез изображения.

Кроме линзы преобразователями Фурье являются дифракционные приборы: дифракционные решетки, интерферометр Фабри–Перо и т.п.

### **Фурье–фильтрация изображений**

**Опыты Аббе–Поттера** основывается на свойствах двумерного преобразования Фурье. Так, если в передней фокальной плоскости линзы поместить щель, на изображении будут размыты элементы, параллельные щели. При этом если наблюдать изображение решетки, помещая щель параллельно одной из ее сторон, получим изображение только полос, перпендикулярных щели.

**Метод темного поля** применяется в микроскопии прозрачных объектов: в фокусе микроскопа помещается непрозрачный диск, что приводит к уменьшению общей освещенности фона и протяженных объектов (малые пространственные частоты, граница которых определяется размером диска) и повышению контраста мелких деталей. Т.е. в этом случае задерживаются прямые лучи, не несущие информации о структуре объекта.

**Метод фазового контраста:** при прохождении через объект с варьирующимся показателем преломления, свет приобретает фазовый рельеф, который при помощи фазовой пластинки, размещенной в фокусе микроскопа, можно превратить в амплитудный рельеф (фоновая волна сдвигается на половину периода, что позволяет еще лучше увеличить контраст изображения, чем метод темного поля).

**Голография** — наиболее полный метод Фурье–анализа, записи и синтеза изображения, основанный на явлении **интерференции**.

## Спектральная плотность мощности

**Спектральная плотность излучения:**  $\rho(\omega, T) = \frac{dw}{d\omega}$ , где  $T$  — температура излучающего абсолютно черного тела (АЧТ),  $w$  — плотность мощности излучения. Тогда плотность излучения  $w = \int_0^{\infty} \rho d\omega$ . Равновесное излучение АЧТ является изотропным (т.е. оно не поляризовано и равновероятно распространяется во всех направлениях).

Энергия излучения, падающего за единицу времени на единицу площади какого-либо тела, определяется выражением  $dW = \frac{c}{4} \rho(\omega, T) d\omega$ . Функцию  $r_{\omega}^* = \frac{c}{4} \rho(\omega, T)$  называют **функцией Кирхгофа**, она определяется как отношение коэффициента излучения АЧТ на данной частоте к коэффициенту поглощения данным телом. Согласно Планку,

$$\rho(\omega, T) = \frac{2}{\pi c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

## Радиационное трение

**Радиационным трением** называется сила, действующая на заряженную частицу со стороны создаваемого ею поля электромагнитного излучения. Движение заряда с ускорением приводит к возникновению излучения, уносящего часть энергии и импульса, поэтому система неравномерно движущихся зарядов не является замкнутой. Такая система ведет себя как механическая система с наличием сил трения. Определить такую силу трения можно, зная теряемую в единицу времени энергию. Так, для нерелятивистского электрона интенсивность излучения составит  $I = 2e^2 a^2 / (3c^3)$ , где  $a$  — ускорение. Сила трения при приближенно периодическом движении описывается **формулой Лоренца**:

$$F = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{da}{dt}.$$

Радиационное трение приводит к затуханию колебаний заряда, что проявляется в уширении спектральной линии излучения.

Действие радиационного трения на заряд приводит к принципиальным трудностям, тесно связанным с проблемой структуры электрона, природы его массы. Практически для учета действия радиационного трения имеет смысл лишь приближенная постановка задачи методом последовательных приближений. Такой метод дает хорошие результаты для излучения с длиной волны  $\lambda \gg r_0 = e^2/m_e c^2$  («классический радиус» электрона). Реально уже при  $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$  необходимо учитывать квантовые эффекты.

## 48 Явление интерференции

**Интерференция монохроматических волн. Получение интерференционной картины делением фронта (Юнг) и амплитуды (Френель)**

**Интерференция** — явление усиления или ослабления света при наложении световых волн. При сложении двух волн  $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$  результирующая интенсивность равна  $I = \frac{1}{2}I_0(1 + \cos \delta)$ , где  $\delta$  — разность фаз волн в данной точке.

Максимальная интенсивность наблюдается в случае, когда  $\delta = 2\pi k$ , минимальная — при  $\delta = (2k + 1)\pi$ .

Получить интерференционную картину можно, разделяя волновой фронт на части (метод Юнга — интерференция на двух щелях, дифракционной решетке), или же деля амплитуду волны (Френель — дифракция в ближней зоне).

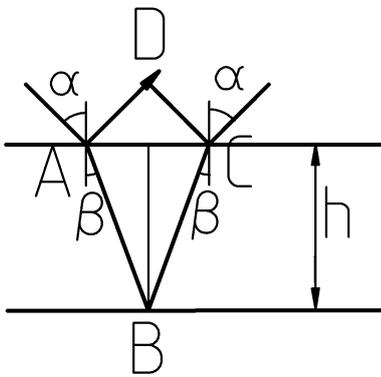
Метод Юнга заключается в делении волнового фронта двумя узкими щелями, играющими роль когерентных вторичных источников. Метод Френеля состоит в делении амплитуды волны двумя зеркалами, расположенными под углом, близким к  $180^\circ$  друг к другу. Роль вторичных когерентных источников играют изображения входной щели.

## Полосы равных толщин и наклона

### Полосы равного наклона

При интерференции в плоскопараллельной пластинке наблюдается наложение волн, отраженных от передней и задней стенок. Разность хода волн равна  $\Delta = 2ABn - AD$ , где  $n$  — показатель преломления плоскопараллельной пластины.  $AD = AC \sin \alpha$ ,  $AC = 2AB \sin \beta$ ,  $AB = h / \cos \beta$ ,  $\Rightarrow$

$$\Delta = 2hn \cos \beta.$$



Т.е.  $\Delta$  зависит от угла падения света (по закону Снеллиуса,  $\sin \alpha = n \sin \beta$ ). Таким образом, при интерференции на плоскопараллельной пластине в дальнем поле наблюдаются полосы равного наклона.

### Полосы равной толщины

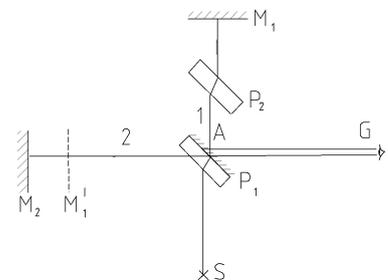
Данная интерференционная картина наблюдается при интерференции на клине. Разность фаз  $\Delta \approx 2hn \cos \beta$  зависит в данном случае от толщины  $h$ , т.е. интерференционная картина наблюдается в ближнем

поле, и, в отличие от полос равного наклона, полосы равной толщины являются действительным изображением.

## Интерферометр Майкельсона

На схеме обозначены:  $P_1$  — полупрозрачное зеркало,  $P_2$  — компенсатор (сделанный из того же материала, что и  $P_1$  и имеющий ту же толщину, но лишенный зеркального покрытия).

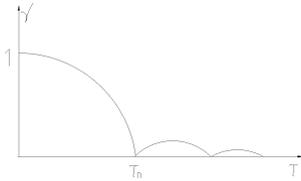
В случае, когда на вход интерферометра Майкельсона попадает параллельный пучок света, наблюдаются интерференционные полосы, в случае расходящегося пучка — кольца равного наклона (как и в случае, когда  $M_1$



и  $M_2$  не перпендикулярны).

## Когерентность волн

**Когерентность** — упорядоченность структуры света, близость ее к идеальной гармонической волне.



**Временная когерентность.** Для характеристики интерференционной картины вводят величину — **видность**  $\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ . На рисунке представлена экспериментальная зависимость видимости от относительной задержки лучей в интерферометре  $\tau$ . Величину  $\tau_k$  называют **временем когерентности**,

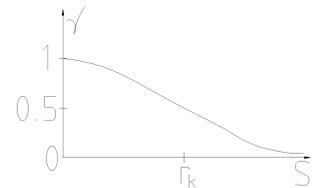
а  $l_k = c\tau_k$  — **длиной когерентности**.

Можно доказать, что  $\gamma$  является коэффициентом автокорреляции комплексной амплитуды излучения  $E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \exp(i\omega_0 t)$ :

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t + \tau) \rangle}{\langle \mathcal{E}\mathcal{E}^* \rangle}.$$

Это обосновывает интерференцию на тонких пленках и ее отсутствие в толстых пластинах.

**Пространственная когерентность.** Опыт показывает, что видность зависит и от расстояния между щелями в опыте Юнга. Назовем пространственной когерентностью способность света давать интерференционную картину в интерферометре Юнга. Параметр  $r_k$  называют **радиусом когерентности**. Его легко измерить экспериментально при помощи интерферометра Юнга.



## Фурье–спектроскопия

Интерферометр Майкельсона можно использовать для прямого измерения автокорреляционной функции  $B(\tau) = \langle E(t)E(t + \tau) \rangle$ . Согласно **теоре-**

ме Винера–Хинчина,  $B(\tau)$  связана со спектром мощности  $G(\omega)$  Фурье–преобразованием:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

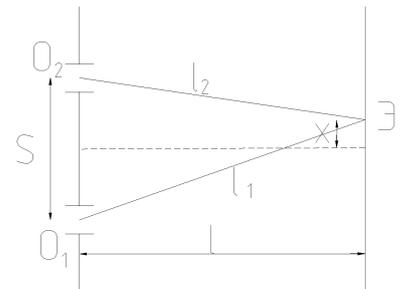
Фурье–спектрометры осуществляют непрерывное кодирование длин волн с помощью интерференционной модуляции, представляющей собой интерферометр Майкельсона. При равномерном перемещении зеркала  $M_2$  в интерференционной картине возникает периодическое мерцание от каждой монохроматической составляющей входного излучения. Суперпозиция таких вкладов от всего поступающего на вход интерферометра спектра регистрируется в функции разности хода, при преобразовании которой с помощью ЭВМ получают искомый спектр.

Фурье–спектрометры одновременно реализуют два выигрыша: за счет многоканальности и за счет увеличения входного отверстия. Они наиболее эффективны при регистрации спектров слабых излучений (особенно в ИК области, где уменьшаются требования к точности изготовления интерферометра). Разрешение таких спектрографов в ИК области достигает величины  $3 \cdot 10^6$ .

## Интерферометр Юнга. Звездный интерферометр Майкельсона

### Интерферометр Юнга

Интерферометр Юнга представляет собой две щели, разнесенные на расстояние  $S$  друг от друга и представляющие собой вторичные когерентные источники. Обычно  $L \gg x \gg S$ . Суммарная освещенность экрана  $E = E_1 + E_2$ , где  $E_1 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 \exp(i\omega_0[t - l_1/c])$ ,  $E_2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_2 \exp(i\omega_0[t - l_2/c])$ . Интенсивность  $I = 2I_0(1 + R)$ , где  $R = \langle E_1 E_2 \rangle / \langle E^2 \rangle$ .



Положим для простоты  $\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle$ . Тогда  $\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \rangle \cos(k_0 \Delta)$ , где  $k_0 = \omega_0/c$ ,  $\Delta = l_1 - l_2$  – разность хода между лучами.

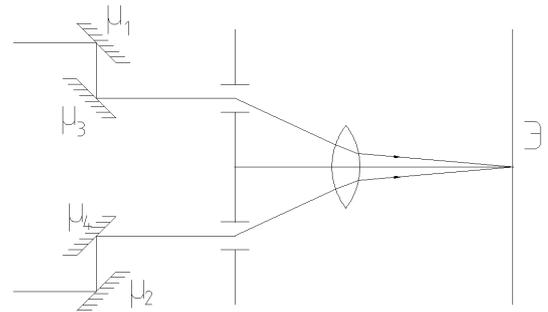
Пусть  $\vec{r}_1 = \vec{r}$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{S}$ ,  $\vec{S} = \overrightarrow{O_1 O_2}$ , тогда  $R = b(\vec{S}) \cos(k_0 \Delta)$ ,  
 $b = \frac{\langle \mathcal{E}(\vec{r}) \mathcal{E}(\vec{r} + \vec{S}) \rangle}{\mathcal{E} \mathcal{E}^*}$ ;  $\Delta = Sx/L$ . Пусть  $q = Sk_0/L$ , тогда  
 $\langle I \rangle = 2I_0 [1 + b(\vec{S}) \cos qx]$ .

Период интерференционной картины  $\delta x = \lambda L/S$ . Таким образом, по интерференционной картине можно определить длину волны входящего излучения.

### Звездный интерферометр Майкельсона

Для измерения угловых размеров близких звезд используется звездный интерферометр Майкельсона. Зеркала  $M_3$  и  $M_4$  неподвижны, а  $M_1$  и  $M_2$  симметрично смещаются, удаляясь или сближаясь.

Видность картины зависит от расстояния  $l$  между зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ . Определим значение  $l$ , при которой видность равна нулю. Это расстояние имеет порядок длины когерентности  $r_{\text{ког}}$ . Т.к.  $r_{\text{ког}} = \lambda/\varphi$ , получим:  $\varphi = \lambda/l$ , где  $\varphi$  – угловой размер звезды. Более точный расчет дает  $\varphi = 1.22\lambda/l$ .



### Оценка длины когерентности

Рассмотрим неточечный источник диаметра  $a$ . Очевидно, размер источника не будет влиять вид интерференционной картины в случае, когда разности хода лучей от краев источника  $|\Delta_1 - \Delta_2| \ll \lambda$ .

Очевидно, в интерференционных экспериментах выполняется условие  $a \ll s \ll z$ ,  $|\Delta_1 - \Delta_2| \approx as/z$ . Следовательно, источник можно считать точечным при  $as/z \ll \lambda$ ,  $\Rightarrow r_{\text{ког}} = \lambda z/a$ : длина когерентности увеличивается

при увеличении  $z$  (в этом случае сферические волны от щелей сближаются).

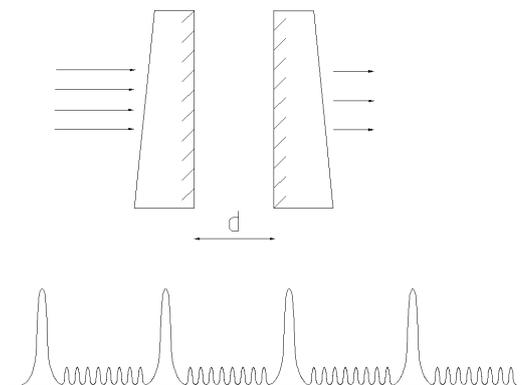
Для Солнца  $z = 150$  млн. км.,  $a = 0.7$  млн. км. Считая  $\lambda = 5000\text{\AA}$ , получим:  $r_{\text{ког}} = 10^{-4}$  м. Для рассеянного солнечного света можно считать  $a \approx z$ , тогда  $r_{\text{ког}} \approx 10^{-6}$  м.

Для лазера свет может быть когерентным по всему поперечному сечению пучка. Для получения крупных голограмм используются лазеры с сечением пучка порядка 1 м.

Длина когерентности определяется и шириной спектра излучателя:  $r_{\text{ког}} = 2\pi c / \Delta\omega \Rightarrow$  чем уже спектр, тем большей будет длина когерентности и время когерентности. Так, для лазеров длина когерентности может достигать нескольких километров.

## Многолучевая интерференция

Для исследования тонкой структуры спектра необходимы спектральные приборы с высоким разрешением. Одним из таких приборов является интерферометр Фабри–Перо (ИФП), состоящий из двух клиновидных пластин с параллельными внутренними сторонами, покрытыми светоотражающим слоем (например, алюминием). Пространство между пластинами может быть заполнено инертным газом.



Для изучения входного излучения снимаются последовательно интерференционные картины (представляющие собой кольца), полученные посредством изменения расстояния между пластинами, либо изменения давления в пространстве между ними. Благодаря значительному количеству интерферирующих лучей (десятки тысяч), ИФП дает очень резкую интерференционную картину.

Картина представляет собой резкие главные максимумы, между которыми находится  $N - 1$  побочный максимум ( $N$  – количество интерферирующих

лучей). Чем большим будет  $N$ , тем меньшей будет интенсивность побочных максимумов и тем уже будут главные максимумы.

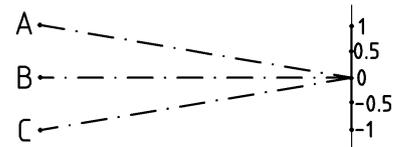
**Резкостью интерферометра** называют величину  $\mathfrak{F} = 2\pi/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – **полуширина** главного максимума (ширина на уровне  $I = 0.5I_0$ ),  $\pi$  – расстояние между главными максимумами. При известном коэффициенте отражения ИФП,  $R$ , резкость вычисляется по формуле  $\mathfrak{F} = \frac{\pi}{1-R}$ .

Рассмотрим интерференцию трех лучей. В точ-

ке 0 разности фаз лучей относительно луча  $B$ ,  $\Delta_A = \Delta_C = 2\pi$ , эта точка – нулевой главный максимум.

В точках  $-1$  и  $+1$   $\Delta_A = 0, 4\pi$ ,  $\Delta_C = 4\pi, 0$  – точки первого главного максимума. В точках  $\pm 0.5$

$\Delta_A = \pi/2, 3\pi/2$ ,  $\Delta_C = 3\pi/2, \pi/2$ ,  $\Delta = \Delta_A + \Delta_C = 2\pi$  – максимум интерференции лучей  $A$  и  $C$ , луч  $B$  несколько уменьшает результирующую яркость, в результате чего в данных точках наблюдаются побочные максимумы.



Если рассматривать интерференцию  $N$  источников, между главными максимумами будет наблюдаться  $N - 1$  побочных с разностью фаз  $\Delta = 2\pi/N$ ,  $n = \overline{1, N - 1}$ . Побочные максимумы образованы попарной интерференцией источников, поэтому, естественно, что при увеличении  $N$  будет уменьшаться яркость побочных максимумов по сравнению с главными. Интенсивность главных максимумов пропорциональна  $N^2$ , ширина – обратно пропорциональна  $N$ .

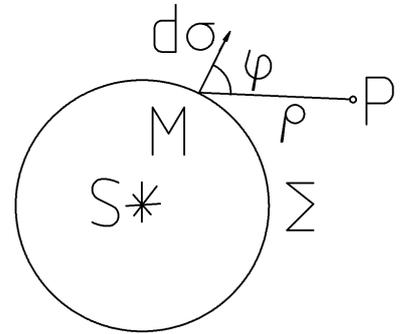
## 49 Явление дифракции

### Принцип Гюйгенса–Френеля

**Дифракция** – явление нарушения прямолинейности распространения света (иногда используют такое определение: явление огибания световыми волнами препятствий). Положение волнового фронта в классической оптике определяется **принципом Гюйгенса**: *каждая точка фронта волны является источником вторичных волн, положение волнового фронта в любой момент*

времени определяется огибающей вторичных волн.

Френель дополнил принцип Гюйгенса. **Принцип Гюйгенса–Френеля** — вторичные волны интерферируют между собой, световое поле является результатом интерференции элементарных вторичных волн, испущенных каждым элементом волновой поверхности.



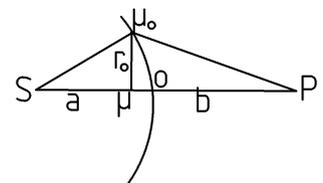
Рассмотрим поверхность  $\Sigma$ , окружающую источник света, и некоторую точку  $M$  на этой поверхности. Будем считать элемент  $\vec{d\sigma}$  вокруг точки  $M$  источником света. Предположим, что испускаемые им волны — монохроматические,  $E = \frac{1}{2}\mathcal{E} \exp(i\omega t)$ . Тогда суммарная интенсивность в некоторой точке  $P$  определяется **интегралом Гюйгенса–Френеля**:

$$\mathcal{E}(P) = \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} K(\varphi) d\sigma,$$

где  $\rho = MP$ ,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  — волновой вектор,  $K(\varphi)$  — «коэффициент наклона», учитывающий зависимость результирующего поля от угла  $\varphi$ . Интеграл Гюйгенса–Френеля позволяет учесть фазы пришедших в точку  $P$  волн и рассчитать итоговую интерференционную картину.

### Зоны Френеля

Выделим на волновой поверхности (см. рис.), имеющей вид сферы с центром в точке  $S$ , кольцевые зоны так, чтобы расстояния от границ этих зон до точки наблюдения изменялись на  $\lambda/2$ :  $M_0P = OP + \lambda/2, \dots, M_nP = M_{n-1}P + \lambda/2$ . Такие кольцевые зоны называются **зонами Френеля**.



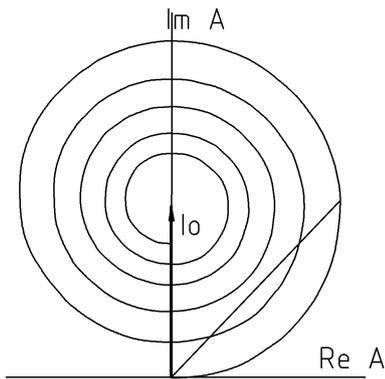
Каждую зону Френеля можно рассматривать как источник двух волн, имеющих определенную фазу:  $r_0^2 = a^2 - (a - x)^2, r_0^2 = (b + \lambda/2)^2 - (b + x)^2, \Rightarrow$

$2ax = b\lambda - 2bx + (\lambda/2)^2$ . Обычно  $a, b \gg \lambda, x$ , поэтому

$$x = \frac{b\lambda}{2(a+b)}, \quad r_0 \approx \sqrt{2ax}, \quad \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}}}.$$

$$r_n = \sqrt{(n+1) \frac{\lambda ab}{a+b}} = r_0 \sqrt{n+1}, \quad \boxed{S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi r_0^2 = \text{const}}.$$

Число открытых зон Френеля называется **числом Френеля**. Для определения амплитуды и фазы колебания, получающегося путем сложения нескольких других колебаний, используются **векторные диаграммы** в комплексной фазовой плоскости  $\Re A, \Im A$ . Фаза волны  $\varphi = \arctg \frac{\Im A}{\Re A} = \arctg(y/x)$ , амплитуда  $|A| = \sqrt{\Re^2 A + \Im^2 A} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $x, y$  – координаты искомой точки на диаграмме.



Для анализа **дифракции Френеля** (дифракция на малых отверстиях или препятствиях) используется **спираль Френеля**: все зоны разбиваются на множество подзон с одинаковым сдвигом фаз (в идеале — на бесконечное количество подзон). Интерференционная картина отображается на векторной диаграмме в виде спирали (см. рис.). Для получения значения интенсивности излучения, полученного в результате дифракции на  $N$  открытых зонах, проводят вектор

из начала координат фазовой диаграммы в точку на спирали Френеля, отображающую данное количество зон.

При дифракции на отверстии максимум интенсивности наблюдается при открытой нулевой зоне ( $I \lesssim 4I_0$ ), минимум — при открытой нулевой и первой зоне ( $I \gtrsim 0$ ).

Для получения интенсивности в случае дифракции на экране, искомый вектор нужно проводить из точки  $I_0$ , соответствующей бесконечному числу открытых зон Френеля. В этом случае наибольшей интенсивности ( $I = I_0$ ) соответствует отсутствие экрана. При открытой первой зоне  $I \lesssim I_0$ . Итоговая интенсивность будет равна нулю только при полном экранировании

падающего излучения, в остальных случаях в центре дифракционной картины всегда будет наблюдаться главный максимум (в отличие от дифракции на отверстии, где в случае четного количества открытых зон в центре картины наблюдается минимум).

## Зонные пластинки

**Зонная пластинка** представляет собой пластинку с затемненными участками, соответствующими четным или нечетным номерам зон Френеля. Зонная пластинка работает как линза, перераспределяя излучение в пространстве. Внесение зонной пластинки между точками  $S$  и  $P$  многократно увеличивает интенсивность излучения в  $P$ . Зонная пластинка обладает несколькими фокусами. Действительно,  $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda F}$ ,  $F = r_n^2/([n+1]\lambda)$  (т.к.  $F = ab/(a+b)$ ).

Помимо зонных, распространены также **фазовые пластинки**, представляющие собой пластинки из прозрачного материала, на поверхности которой нанесены кольцевые утолщения так, чтобы излучение от четных и нечетных зон Френеля отличалось по фазе на  $\lambda/2$ . Фазовая пластинка имеет большую светопропускаемость по сравнению с зонной.

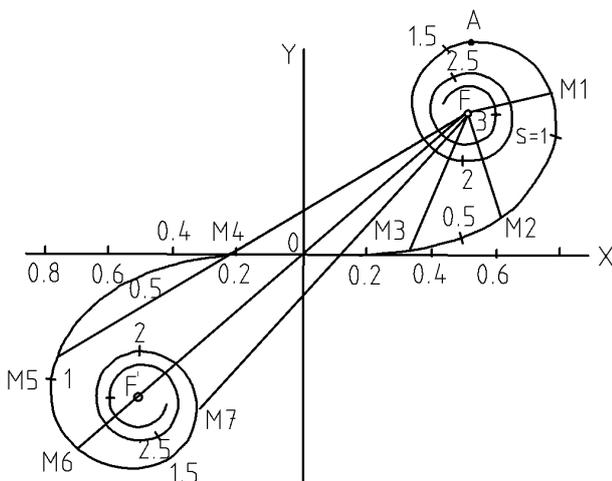
## Дифракция на краю полубесконечного экрана. Спираль Корню

Разобьем плоскую волновую поверхность, падающую на экран, на параллельные краю экрана зоны. Ширина  $n$ -й зоны  $d_n^2 = (l + n\lambda/2)^2 - l^2 \approx nl\lambda + (n\lambda/2)^2$ ,  $\Rightarrow d_n \approx \sqrt{nl\lambda}$ , где  $l$  – расстояние от края экрана до внутренней границы зоны. Площадь зон  $S_n = (d_{n+1} - d_n)L \approx L/2\sqrt{\lambda l/n}$ , где  $L$  – длина края экрана. Т.о., в данном случае площадь зон убывает пропорционально  $n^{-1/2}$ .

Если отодвигать экран назад, будут открываться новые зоны Френеля, симметричные относительно начала координат на векторной диаграмме. В данном случае векторная диаграмма носит название **спирали Корню**. Пра-

вая ветвь спирали Корню позволяет рассчитать результирующую интенсивность при дифракции на краю экрана.

## Теория дифракции Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера



Дифракционной длиной светового пучка,  $Z_d$ , называют расстояние, на котором отверстие совпадает с нулевой зоной Френеля. Область расстояний  $Z \ll Z_d$  называют **ближней зоной**, а  $Z \gg Z_d$  – **дальней зоной**. В дальней зоне интенсивность пучка на оси значительно меньше интенсивности исходной волны, наблюдается явление дифракционного расширения светового пучка.

$Z - d = r^2/\lambda$ ; количество зон Френеля, помещающихся в отверстии,  $N - F = r^2/(\lambda Z) = Z_d/Z$ ,  $\Rightarrow$  в ближней зоне  $N_F \gg 1$ , а в дальней  $N_F \approx 0$ .

Естественно допустить, что положение границы светового пучка определяется из условия  $\Delta = \lambda/2$ , тогда, т.к.  $\Delta \approx \sin(\theta_d/2)$ , получим выражение для **угла расходимости светового пучка**:  $\theta_d = \lambda/d$ , а диаметр пучка можно определить по выражению  $d(Z) = \lambda Z/d_0$ .

Общий метод решения дифракционной задачи предложил Кирхгоф. Из волнового уравнения,  $\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$ , получим:  $\Delta \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = 0$  (**уравнение Гельмгольца**). Его решения:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(-i\vec{k}\vec{r})$  и  $\mathcal{E} = A \exp(-i\vec{k}\vec{r})/r$ , соответствующие плоской и сферической волнам соответственно.

Теория Кирхгофа рассматривает дифракцию сферической волны. Граничные условия Кирхгофа: на теневой стороне экранов  $\mathcal{E} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}} = 0$  ( $\vec{n}$  – нормаль к волновой поверхности); в пределах отверстия  $\mathcal{E}$  и  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}}$  таковы, как

если бы экраны отсутствовали. Решение задачи Кирхгофа называют **интегралом Кирхгофа–Гельмгольца**:

$$\mathcal{E}(P) = \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{\rho})}{\rho} K(\varphi) d\sigma,$$

где интегрирование ведется по поверхности волнового фронта,  $K(\varphi) = \frac{i}{\lambda}(1 + \cos \varphi)/2$  имеет отличную от ядра интеграла Гюйгенса–Френеля форму.

Теория Кирхгофа основывается на **теореме Кирхгофа–Гельмгольца**:

$$\mathcal{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( G \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}} - \mathcal{E} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right) dS, \quad \text{где } G = \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{\rho})}{\rho} \text{ — функция Грина.}$$

Приближения теории Кирхгофа для ближней и дальней зоны называют приближениями Френеля и Фраунгофера, соответственно.

**Приближение Френеля.** В случае ближней зоны  $K(\varphi) \approx i/\lambda, \Rightarrow$

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{\rho})}{\rho} d\sigma.$$

На практике расчеты по этой формуле сводятся к нахождению интегралов  $C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos(\pi t^2/2) dt$  и  $S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin(\pi t^2/2) dt$  при помощи спирали Корню.  $\rho^2(\alpha_1, \alpha_2) = (C(\alpha_1) - C(\alpha_2))^2 + (S(\alpha_1) + S(\alpha_2))^2$ .

**Приближение Фраунгофера.** Для дальней зоны  $K(\varphi) \approx i/\lambda, d\sigma = dx dy, \rho = \sqrt{Z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Если  $Z \gg x, y, x_0, y_0$ , то  $P = (x_0, y_0, Z), M = (x, y, 0), \rho = b + \frac{x^2 + y^2}{2b} - \frac{xx_0 + yy_0}{b}$ . Пусть  $\sin \theta = x_0/b$ , тогда

$$\mathcal{E}(\theta, Z) = \frac{i + 1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ikx^2}{2b}\right) \exp(ikx \sin \theta) dx.$$

При  $kd^2/(2b) \ll 1$  ( $d$  – начальный диаметр пучка),

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{i + 1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp(ikx \sin \theta) dx. \quad (49.1)$$

Данное предположение справедливо, т.к.  $Z \gg Z_d$ , где  $Z_d = kd^2/r$  – дифракционная длина пучка.

Т.о., в дальней зоне формируется устойчивое угловое распределение интенсивности, не меняющееся с расстоянием.

## Дифракция в дальней зоне как Фурье–образ объекта

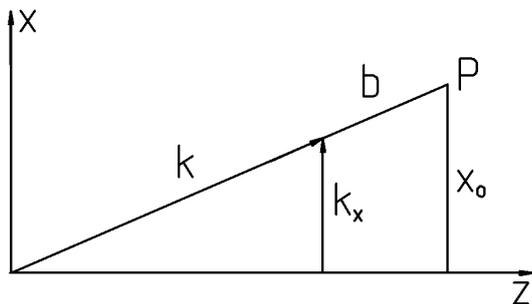
Интеграл 49.1 является пространственным интегралом Фурье, где  $k \sin \theta$  играет роль пространственной частоты. Т.к.  $k \sin \theta = k_x$  – поперечная компонента волнового вектора, между  $k_x$  и  $\theta$  имеется взаимно однозначное соответствие:

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \mathcal{E}_0(k_x), \quad \mathcal{E}_0(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) e^{ik_x x} dx.$$

Интенсивность в дальней зоне:

$$I(P) = \frac{\text{const}}{8\pi} |\mathcal{E}(P)|^2 = \frac{\text{const}}{8\pi} \frac{1}{\lambda b} S_0(k_x),$$

где  $S_0(k_x) = |\mathcal{E}_0(k_x)|^2$  – **угловой спектр излучения**.



Т.о., дифракция Фраунгофера является

пространственным разложением ограниченного светового пучка на плоские волны.

## Дифракция на щели.

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \leq d/2, \\ 0, & |x| \geq d/2. \end{cases}$$

Введем функцию **интегрального синуса**  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ . Тогда

$$I(\theta) = I_{\max} \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right), \quad I_{\max} = I_0 \frac{d^2}{\lambda b}.$$

Дифракционная расходимость пучка  $\Delta\theta = \lambda/d$ .

Дифракционная картина представляет собой резкий главный максимум в центре, сопровождающийся побочными максимумами с быстро падающей амплитудой.

**Дифракция на прямоугольном отверстии.** Дифракционная картина представляет собой суперпозицию дифракционных картин от двух расположенных поперек щелей с ширинами  $d_1$  и  $d_2$ . Помимо угла  $\theta$  введем угол  $\psi$  — угол дифракции относительно стороны  $d_2$ .

Итоговая картина распределения интенсивности описывается выражением:

$$I(\theta, \psi) = I_{max} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi d_1 \sin \theta}{\lambda} \right) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi d_2 \sin \psi}{\lambda} \right), \quad I_{max} = I_0 \frac{d_1 d_2}{\lambda b}.$$

**Дифракция на круглом отверстии.** В данном случае наблюдается кольцевая дифракционная картина с угловым распределением интенсивности:

$$I(\theta) = I_{max} \left( \frac{J_1(2\pi\theta k/\lambda)}{2\pi\theta k/\lambda} \right)^2,$$

где  $J_1$  — **функция Бесселя первого порядка**,  $I_{max} = I_0 \frac{\pi R^2}{\lambda b}$ ,  $R$  — радиус отверстия,  $I_0$  — как и ранее, интенсивность падающего излучения.

Наблюдающуюся дифракционную картину называют **картиной Эйри**. Угловая ширина главного максимума  $\Delta\theta_0 = 1.22\lambda/R$  является пределом углового разрешения изображений при наблюдении в телескоп или микроскоп.

## Дифракционные решетки. Акустооптические модуляторы

Дифракционная решетка представляет собой прозрачную пластинку, на которую нанесены непрозрачные штрихи (пропускающая решетка), либо металлическую пластинку, на которой вырезаны клиновидные углубления (отражающая решетка). Перечисленные виды решеток относятся к *амплитудным*

*дифракционным решеткам.* Основными характеристиками решеток являются **период**  $d$  и **разрешающая способность**  $R = \lambda/\delta\lambda$ , зависящая от количества штрихов решетки и некоторых других характеристик.

При многолучевой интерференции прошедшего решетку излучения образуется дифракционная картина, представляющая собой набор главных максимумов, разделенных побочными максимумами. При большом количестве штрихов решетки можно считать, что интенсивность побочных максимумов близка к нулю.

Главные максимумы наблюдаются при условии  $d(\sin \theta - \sin \psi) = m\lambda$ , где  $\theta$  – угол дифракции,  $\psi$  – угол падения,  $m$  – порядок дифракции.

В *фазовых решетках* штрихи формируют так, чтобы образовать зоны с постоянной разностью фаз.

Дифракция на акустических волнах связана с тем, что под воздействием стоячих ультразвуковых волн в прозрачной среде образуется пространственная фазовая решетка. Если ультразвуковые волны не являются стоячими, дифракционная картина искажается **эффектом Доплера**: частота дифрагированного излучения равна  $\omega_m = \omega \pm m\Omega$ , где  $\omega$  – частота падающего излучения,  $\Omega$  – частота звука.

Для низкочастотного звука наблюдается **дифракция Рамана–Ната**:  $\sin \theta = m\lambda/\Lambda$ , где  $\Lambda$  – длина волны звука.

Дифракция на ультразвуке называется **дифракцией Брэгга**. Она происходит, если свет падает на прозрачную пластинку под **углом Брэгга**  $\theta_B = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\Lambda}\right)$ . Существует предельная звуковая частота, выше которой брэгговская дифракция невозможна:  $\Omega_{lim} = 4\pi c_{звук}/\lambda$ .

Дифракция света на акустических волнах позволяет определять характеристики звуковых полей, не внося в них изменения. Этими характеристиками являются, например, модули упругости, упругооптические свойства материалов, поглощение и скорость звука. Кроме того, при помощи акустооптических модуляторов возможна передача полезных многомодовых сигналов при помощи оптических волокон.

## 50 Дифракция в оптических приборах и спектральный анализ

### Спектральный анализ

**Спектральный анализ** позволяет вычислить такие характеристики веществ, как химический состав, концентрацию растворов, температуру и т.д.

Спектральный анализ делится на два вида: анализ излученного веществом света (эмиссионный анализ) и анализ поглощенного света, испущенного широкополосным источником (абсорбционный анализ). В обоих случаях используются такие приборы, как дифракционная решетка, интерферометр Фабри–Перо, призма.

Помимо того, существует спектральный анализ оптических изображений (**голография**) — запись на толстую фотопластинку пространственного Фурье–спектра объекта.

В подавляющем большинстве случаев спектроскопия основана на разложении исходного излучения в пространственный спектр при помощи различных спектральных приборов.

### Спектральные приборы и их характеристики

Зависимость коэффициента поглощения и преломления вещества от длины волны падающего излучения несет информацию о структуре и свойствах атомов и молекул среды. Дисперсию вещества можно измерить методом Ньютона (метод скрещенных призм).

**Дисперсия.**  $D_* = \frac{dn}{d\lambda}$ . Обычно у веществ  $D_* < 0$ , однако, у некоторых веществ наблюдается **аномальная дисперсия**, когда  $D_* > 0$ .

**Фазовая скорость** света

$$u = \frac{d\omega}{dl} = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi n\nu/c)} = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} D_*},$$

где  $v = c/n$  – **групповая скорость** света.

Т.о., при нормальной дисперсии  $u < v$ , а при аномальной  $u > v$ . За счет зависимости фазовой скорости света от его частоты и возникает способность призм разлагать спектр в пространстве.

Дифракционная решетка осуществляет разложение света в спектр за счет явления многолучевой интерференции дифрагирующих лучей. Аналогично возникает интерференционная картина в интерферометрах Фабри–Перо.

**Аппаратная функция, разрешающая способность.** Аппаратной функцией дифракционного прибора называется его реакция на идеально монохромное излучение ( $\delta$ -функцию), поданное на вход прибора. Идеальной является аппаратная функция в форме  $\delta$ -функции, однако, за счет конечного числа интерферирующих лучей и неидеальности дифракционных приборов она имеет вид, близкий к функции интегрального синуса.

**Разрешающая способность** (разрешение) спектрального прибора определяется отношением  $R = \lambda/\delta\lambda$ , где  $\delta\lambda$  – разность длин волн двух соседних линий в данном участке спектра, которые способен разрешить отдельно спектральный прибор. Для дифракционной решетки  $R = mN$ , где  $m$  – порядок дифракции,  $N$  – количество штрихов, нанесенных на решетку.

**Дисперсия.** Областью дисперсии,  $G$ , (свободным спектральным интервалом,  $FSR$ ) называется ширина спектра в данном порядке дифракции, на который не накладываются соседние порядки. Для решетки  $G = \lambda/m$ .

**Угловой дисперсией** называется величина  $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\varphi$  – расстояние между двумя спектральными линиями с разностями длин волн  $\delta\lambda$ . Из уравнения решетки получим:  $d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda$ ,  $\Rightarrow D_\varphi = \frac{m}{d \cos \varphi}$ . При малых углах дифракции  $D_\varphi \approx m/d$ .

**Линейной дисперсией** называют величину  $D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$ , где  $\delta l$  – расстояние между линиями на светоприемнике спектрального прибора.  $D_l$  зависит от фокусного расстояния  $F$  объектива спектрального прибора:  $D_l = F D_\varphi \approx Fm/d$ .

## Дифракционная теория формирования изображения

Данная теория была разработана Аббе и поэтому, обычно, носит его имя.

Согласно теории Аббе, процесс формирования изображения линзой заключается в следующем. В области от самой линзы до ее задней фокальной поверхности происходит Фурье–анализ волнового поля, испущенного объектом. В области между передней фокальной поверхностью линзы и плоскостью изображения происходит Фурье–синтез изображения.

Вводя различные щели и экраны в область передней фокальной плоскости линзы можно изменять вид изображения за счет коррекции его пространственного Фурье–спектра.

Оптические приборы рассматриваются как дифракционные, т.е. их корпуса играют роль дифракционных приборов (например, дифракция излучения на входном зрачке телескопа ограничивает его разрешающую способность). Сами же оптические приборы выполняют операции прямого и обратного Фурье–преобразования излучения, проходящего сквозь них.

## Роль дифракции в приборах: линзе, телескопе, микроскопе

В формировании изображения большую роль играет число зон Френеля  $N_F = r^2/(\lambda Z)$ , открываемых прибором. При  $N_F \gg 1$  дифракцией можно пренебречь. В данном случае будет справедливо рассматривать оптические явления, используя геометрическую оптику. При  $N_F > 1$  наблюдается дифракция Френеля, а при  $N_F \leq 1$  – дифракция Фраунгофера.

При построении изображения в простой линзе  $N_F \gg 1$ , поэтому в данном случае можно не учитывать дифракционные явления. Однако, при получении изображения в телескопах и микроскопах их необходимо учитывать.

При очень малых угловых размерах объекта наблюдается дифракция Фраунгофера, изображение объекта имеет вид дифракционного кружка Эйри. Угловой диаметр главного максимума,  $\varphi_{min} = 1.22\lambda/D$ , где  $D$  – диаметр входного зрачка.  $\varphi_{min}$  ограничивает разрешение телескопа, являясь его пре-

дельным разрешением.

При наблюдении в микроскоп наблюдается дифракция Френеля. Из уравнения  $d \sin \theta = m\lambda$  получим минимальный линейный размер, разрешаемый микроскопом:  $d_{min} = \lambda$ .

## 51 Дисперсия диэлектрической проницаемости

### Физический смысл комплексной диэлектрической проницаемости

Уравнения Максвелла для среды имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Удобно ввести комплексную амплитуду для напряженностей электрического и магнитного поля, электрической индукции и поляризованности, обозначив ее соответственно  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{P}$ . Тогда, например, напряженность ЭП будет выражаться через комплексную амплитуду так:  $\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \exp(i[\omega t - \vec{k} \vec{r}])$ , где  $\vec{k}$  – волновой вектор. Аналогично запишутся выражения для остальных величин. В этом случае уравнения Максвелла также будут записываться через комплексные амплитуды. Волновое уравнение примет вид:  $\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}] + \omega^2 \vec{\mathfrak{D}} = 0$ .

В изотропных средах  $\vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \vec{D}$ , следовательно, их комплексные амплитуды также будут параллельны друг другу.

Для выражения электрической индукции через напряженность ЭП необходимо ввести **комплексную диэлектрическую проницаемость**  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ :  $\vec{\mathfrak{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{\mathcal{E}}$ . Кроме того, справедливо соотношение  $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) - i\kappa(\omega)$ , где  $\kappa(\omega)$  – коэффициент поглощения.

Т.к.  $\vec{k} \times \vec{\mathfrak{D}} = 0$ , получим:

$$-k^2 \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \Rightarrow \quad k = \omega \tilde{n}(\omega),$$

где  $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\omega)}$  – **комплексный показатель преломления среды**.

## Формула Крамерса–Кронига

Соотношения Крамерса–Кронига являются дисперсионными соотношениями, связывающими показатель преломления среды  $n(\omega)$  с коэффициентом поглощения  $\kappa(\omega)$ . **Прямое соотношение Крамерса–Кронига:**

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{\kappa(x) dx^2}{x^2 - \omega^2} = n(0) + \frac{\omega^2}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{\kappa(x) dx^2}{x^2(x^2 - \omega^2)}.$$

**Обратное соотношение Крамерса–Кронига:**

$$\kappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n(x) dx}{x^2 - \omega^2}.$$

Физически соотношения Крамерса–Кронига выражают существование жесткой связи дисперсии световой волны и ее поглощения. Они справедливы для большинства немагнитных сред со слабой пространственной дисперсией.

## Микроскопическая картина распространения света в веществе. Классическая электронная теория дисперсии

Нелокальность отклика поляризованности среды на изменение внешнего электрического поля приводит к пространственной дисперсии (зависимости фазовой скорости света от его частоты), а инерционность этого отклика приводит к временной дисперсии.

Согласно классической осцилляторной модели атома, под воздействием внешнего электрического поля электронные орбиты атомов вытягиваются, вещество поляризуется. Классическое уравнение колебания гармонического осциллятора имеет вид:  $\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}'$ , где  $r$  – амплитуда колебания электрона,  $2\gamma = g/m$ ,  $g$  – коэффициент затухания,  $m$  – масса электрона,  $e$  – его заряд,  $E'$  – напряженность внешнего электрического поля. Если пренебречь различием между полем волны в вакууме,  $E$ , и межатомным внешним полем,  $E'$ , получим:

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E},$$

где  $\omega$  – частота падающей волны. Таким образом, атом поляризуется, приобретая дипольный момент  $\vec{p} = e\vec{r} = \beta\vec{E}$ , где  $\beta$  – **поляризуемость атома**.

Если среда состоит из  $N$  атомов, ее поляризованность  $\vec{P} = N\vec{p}$ , а индукция  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$ , где

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} E.$$

Вдали от собственной частоты  $\omega_0$  наблюдается нормальная дисперсия, мнимой частью в выражении для диэлектрической проницаемости можно пренебречь:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E.$$

Формула для  $n$  такого вида впервые была получена Зельмейером в механической теории Эфира.

Для сложных атомов необходимо суммировать воздействие всех линейных осцилляторов, моделирующих поведение данного атома. При этом возникнет весовой коэффициент, обозначающий вклад  $i$ -го осциллятора в результирующее колебание — **сила осциллятора**. Для каждого осциллятора вблизи его собственной частоты будет наблюдаться скачек дисперсии (область аномальной дисперсии), когда при увеличении частоты внешнего возмущения показатель преломления среды сначала быстро возрастает, а затем скачкообразно спадает.

Если учесть взаимодействие молекул в веществе, необходимо заменить  $\vec{E}'$  на  $\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}$ . В этом случае получим **формулу Лорентца–Лоренца**:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi Ne^2/m}{3\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Из этой формулы следует, что при неизменной частоте  $\omega$

$$r \equiv \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const},$$

т.к. концентрация  $N$  молекул пропорциональна плотности вещества. Величина  $r$  называется **удельной рефракцией**. Т.о., согласно формуле Лорентца–Лоренца, *удельная рефракция вещества не должна изменяться при изменении его плотности*.

## Фазовая и групповая скорости света

**Фазовая скорость волны**,  $v = \omega/k$ , является скоростью распространения переднего фронта волны. **Групповая скорость**,  $u = \frac{d\omega}{dk}$ , является скоростью распространения волнового пакета, как единого целого.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Т.к.  $\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$ ,  $\lambda = 2\pi/k$ , получим:  $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$ ,  $\Rightarrow \frac{dv}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda}{k}$ .  
Получим **формулу Рэлея**:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad \text{или} \quad u = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}},$$

которая связывает фазовую и групповую скорости света.

За счет дисперсии происходит «расплывание» волновых пакетов, имеющих разные частоты: пакеты с большими групповыми скоростями «обгоняют» пакеты с меньшими скоростями. При выходе такого сигнала из диспергирующей среды наблюдается пространственное разделение волновых пакетов, имеющих разные частоты.

## Поглощение света. Закон Бугера–Ламберта–Бэра

Пусть  $S$  – поперечное сечение светового пучка, проходящего через некоторую среду. При прохождении элементарного участка  $dl$  за счет поглощения (абсорбции) в среде интенсивность излучения в пучке уменьшится на величину  $dI = -I_0 \delta dl$ , где  $I_0$  – начальная интенсивность,  $\delta$  – коэффициент поглощения. Интегрируя полученное выражение, получим **закон Бугера–Ламберта**:  $I(l) = I_0 \exp(-\delta l)$ .

Бэр заметил, что коэффициент поглощения в растворах пропорционален концентрации раствора:  $\delta = \sigma n$ , где  $\sigma$  – сечение поглощения. Поглощение в жидкостях происходит согласно **закону Бугера–Ламберта–Бэра**:

$$I(l) = I_0 \exp(-\sigma n l).$$

## Особенности распространения света в металлах

Оптические свойства металлов определяются, в основном, наличием в них свободных электронов, у которых  $\omega_0 = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Тогда получим:  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}$ ,  $\Rightarrow \boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ , где  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m}}$  – **плазменная частота**.

Для свободных электронов плазменная частота соответствует обычно ультрафиолетовому диапазону, следовательно, в диапазоне видимого света  $\varepsilon < 0$ , и показатель преломления является чисто мнимым числом.

Т.к. коэффициент отражения  $R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$ , где  $n_{1,2}$  – комплексные показатели преломления сред, то для границы воздух – металл:  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = in''$  ( $n''$  – действительное число),  $\Rightarrow R = 1$ , т.е. глубоко внутрь металлов волны с частотами  $\omega < \omega_p$  не проникают.

Благодаря тому, что для различных металлов плазменные частоты различаются, металлы, у которых  $\omega_p$  находится в диапазоне видимого света, за счет частичного поглощения света принимают ту или иную окраску.

## 52 Поляризация света, граничные эффекты

### Математическое описание состояния поляризации. Поляризация естественного света

Линейно (плоско-) поляризованная волна математически описывается уравнением  $\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z})$ , т.е. для нее плоскость колебаний вектора  $\vec{E}$  в пространстве не изменяется. **Плоскостью поляризации** называют плоскость колебаний вектора  $\vec{H}$ .

В естественном свете присутствует огромное число волновых пакетов с различно ориентированными плоскостями поляризации. При прохождении через некоторые среды естественный свет может частично поляризоваться (т.е. в нем начинают преобладать пакеты с одинаковой плоскостью поляризации). **Степенью поляризации** называют величину  $P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ ,

где  $I_{max}$  и  $I_{min}$  – максимальная и минимальная интенсивности излучения, разложенного по двум взаимно перпендикулярным плоскостям поляризации. Степень поляризации естественного света равна нулю.

Электромагнитное колебание можно представить в виде

$$\vec{E}(t, z) = \vec{i}E_x \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z} + \varphi_x) + \vec{j}E_y \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z} + \varphi_y).$$

Тогда, в зависимости от соотношения  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ , а также  $E_x$  и  $E_y$  возможны следующие **виды поляризации**:

- $\varphi_x = \varphi_y$  – линейная поляризация;
- $\varphi_x - \varphi_y = \pm\pi/2$  – эллиптическая поляризация;
- $\varphi_x - \varphi_y$  хаотически меняется – естественный свет ( $P = 0$ ).

Для получения поляризованного света используют **поляризаторы**, а для определения вида поляризации – **анализаторы** (обычно это те же самые устройства, что и поляризаторы).

При прохождении плоскополяризованного света через анализатор, его интенсивность меняется по **закону Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между плоскостями поляризации света и анализатора.

## Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля

Рассмотрим падение электромагнитной волны на плоскость раздела двух изотропных диэлектриков. Разложим напряженность ЭП падающей волны на две составляющие:  $E_{\parallel}$ , лежащую в плоскости падения волны (плоскость, проходящая через падающий луч и перпендикуляр к границе раздела сред), и  $E_{\perp}$ , перпендикулярную плоскости падения.

Обозначим комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волны, соответственно,  $A_{\parallel}$ ,  $A_{\perp}$ ;  $A'_{\parallel}$ ,  $A'_{\perp}$ ;  $A''_{\parallel}$ ,  $A''_{\perp}$ ; угол падения:  $\theta_1$ , угол

преломления:  $\theta_2$ . **Формулы Френеля** выражают амплитуды отраженной и преломленной волн через амплитуду падающей волны и угол падения:

$$A'_{\parallel} = A_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}; \quad A'_{\perp} = -A_{\perp} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)};$$

$$A''_{\parallel} = A_{\parallel} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}; \quad A''_{\perp} = A_{\perp} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

В данном случае также вводят **коэффициенты отражения и преломления**:  $r = A'/A$ ,  $t = A''/A$ .

Если обозначить показатели преломления первой и второй сред, соответственно,  $n_1$  и  $n_2$ , углы падения и преломления окажутся связаны между собой **законом Снеллиуса**:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

## Поляризация отраженной и преломленной волн. Угол Брюстера

При попадании на границу двух сред, естественный свет испытывает преломление и отражение. При этом отраженный свет является частично поляризованным в плоскости падения, а преломленный — в перпендикулярной плоскости.

Угол, при котором степени поляризации преломленного и отраженного лучей оказываются максимальными, называют **углом Брюстера**,  $\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_1/n_2$ . В случае падения излучения под углом Брюстера, отраженный луч оказывается полностью поляризованным в плоскости падения, а преломленный — в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Отраженный и преломленный лучи при этом перпендикулярны друг другу.

## Распределение света в анизотропных средах. Двойное лучепреломление

В анизотропных средах (кристаллы) происходит двойное лучепреломление: наблюдаются «обыкновенный» и «необыкновенный» лучи со взаимно перпендикулярной плоскостью поляризации. Для обоих типов лучей показатель

преломления анизотропного вещества окажется различным ( $n_o$  для обыкновенного и  $n_e$  для необыкновенного лучей).

Для таких веществ вводятся понятия тензоров оптической восприимчивости и диэлектрической проницаемости. Обозначим тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ . В главной системе координат он примет диагональный вид, с ненулевыми элементами  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{zz}$ .

В зависимости от значений элементов тензора  $\hat{\epsilon}$  в главной системе координат, выделяют следующие типы кристаллов:

- **изотропные:**  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon$ ,  $n = \sqrt{\epsilon}$ ;
- **одноосные:**  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ ,  $n_o = \sqrt{\epsilon_{xx}} = \sqrt{\epsilon_{yy}}$ ,  $n_e = \sqrt{\epsilon_{zz}}$ ;
- **двухосные:**  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ , существует три разных показателя преломления;
- **положительные:**  $n_o < n_e$ ;
- **отрицательные:**  $n_o > n_e$ .

**Главной плоскостью** кристалла называется плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны и оптическая ось кристалла  $\vec{z}_0$ . В обыкновенной волне, (*o*), поляризация перпендикулярна главной плоскости, а у необыкновенной, (*e*) — параллельна ей.

Предположим, что волна распространяется в кристалле с направлением, не совпадающем ни с одной осью. Дисперсионное уравнение в комплексных амплитудах примет вид:  $\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathcal{D}} = 0$ , или  $(\vec{k}\vec{\mathcal{E}})\vec{k} - k^2\vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{D}} = 0$ .

Для обыкновенного луча:  $\vec{\mathcal{D}} = n_o^2\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{k}\vec{\mathcal{E}} = 0$ ,  $\Rightarrow v_o = c/n_o$  вне зависимости от направления луча в кристалле. Для необыкновенного луча:  $\vec{k}\vec{\mathcal{E}} \neq 0$ , следовательно, скорость будет лежать в диапазоне  $(c/n_o, c/n_e)$ .

Пусть  $\vec{m} = \vec{k}/k$ , где  $k = \omega n/c$ . Тогда  $\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{n^2}\vec{\mathcal{D}} = (\vec{m}\vec{\mathcal{E}})\vec{m}$ . Для одноосного кристалла получим:  $\mathcal{D}_x = n_o^2\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{D}_y = n_o^2\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{D}_z = n_e^2\mathcal{E}_z$ .  $\Rightarrow$

$$\mathcal{D}_{x,y} = \frac{(\vec{m}\vec{\mathcal{E}})m_{x,y}}{n_o^{-2} - n^{-2}}; \quad \mathcal{D}_z = \frac{(\vec{m}\vec{\mathcal{E}})m_z}{n_e^{-2} - n^{-2}},$$

а т.к.  $\vec{m}\vec{D} = 0$ , получим **уравнение нормалей Френеля**:

$$\frac{m_x^2 + m_y^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{m_z^2}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Это уравнение дает возможность получить значение величины  $n$  — показателя преломления необыкновенного луча для любого направления в кристалле, а также скорости его распространения  $v = c/n$ .

Пусть  $\varphi = \angle(OZ, \vec{k})$ , тогда, т.к.  $|\vec{m}| = 1$ , получим:  $m_z = \cos \varphi$ ,  $m_x^2 + m_y^2 = \sin^2 \varphi$ ,  $\Rightarrow$

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Последнее уравнение является *уравнением эллипсоида показателя преломления*. Его решение:

$$n(\varphi) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \varphi + n_o^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Для случая двойного лучепреломления закон Снеллиуса имеет вид:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2^{(o)} \sin \theta_2^{(o)} = n_2^{(e)} \sin \theta_2^{(e)}.$$

Для объяснения двойного лучепреломления в одноосном кристалле и нахождения направлений обыкновенного и необыкновенного лучей можно воспользоваться графическим методом Гюйгенса. Он заключается в графическом построении волновых поверхностей падающей волны и преломленных обыкновенной и необыкновенной волн в соответствии с принципом Гюйгенса.

## Интерференция поляризованных волн

В случае сложения двух перпендикулярных колебаний, они не интерферируют между собой, следовательно, не могут интерферировать и обыкновенная и необыкновенная волны. Этот факт подтверждается опытами.

Опыт по интерференции поляризованных волн можно провести следующим образом. Между скрещенными поляризаторами устанавливают двулучепреломляющий кристалл. Выходная освещенность зависит от ориентации кристалла и фазового набег между обыкновенной и необыкновенной волнами. Фазовый набег зависит от длины волны. Разность хода двух волн:  $\Delta = (n_o - n_e)d$ , фазовый набег:  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda_0$ . Если убрать один из поляризаторов, интерференционная картина не возникнет. В данном опыте две волны, поляризованные перпендикулярно друг другу, интерферируют за счет того, что второй поляризатор выделяет из них составляющие, совпадающие по направлению.

## Получение и анализ эллиптически поляризованного света

Для этих целей используют **фазовую пластинку**  $\lambda/4$ , дающую сдвиг фаз  $\pi/2$  между обыкновенным и необыкновенным лучами. Фазовые пластинки вырезают из двулучепреломляющих кристаллов в направлении, параллельном оптической оси.

Пластинку устанавливают так, чтобы оптическая ось пластинки составляла угол  $\pi/4$  с направлением поляризации падающей на нее волны. В результате свет, выходящий из пластинки, имеет циркулярную поляризацию. В случае, когда угол между осью пластинки и направлением поляризации падающего света не равен  $\pi/4$ , выходящая волна будет эллиптически поляризованной.

Четвертьволновой пластинкой можно и анализировать свет на предмет его циркулярной поляризации. Если скрестить четвертьволновую пластинку и поляризатор под углом  $\pi/4$ , то, в случае, если на пластинку попадает эллиптически поляризованное излучение, при определенном угле поворота системы через поляризатор не будет проходить свет. Если при вращении системы освещенность на выходе будет постоянной, на входе имеем естественный свет. Изменение выходной освещенности в процессе вращения свидетельствует о том,

что входной сигнал поляризован линейно.

## Анизотропия оптических устройств

**Фотоупругость.** При однородном растяжении или сжатии изотропного тела, оно приобретает оптические свойства одноосного кристалла. Разница показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в этом случае пропорциональна напряжению:  $n_o - n_e \propto \sigma$ . Явление фотоупругости используют для анализа напряжений в конструкциях на их моделях, сделанных из прозрачного изотропного вещества (стекла, плексигласа).

**Эффект Керра.** При помещении прозрачного изотропного диэлектрика (твердого, жидкого или газообразного) во внешнее ЭП, в нем возникает оптическая анизотропия. Разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн подчиняется **закону Керра**:  $n_e - n_o = B\lambda_0 E^2$ , где  $B$  – **постоянная Керра**,  $\lambda_0$  – длина волны падающего излучения,  $E$  – напряженность внешнего ЭП. Для большинства веществ  $B > 0$  и они подобны положительным одноосным кристаллам.

**Эффект Коттона–Муттона.** При помещении прозрачного диэлектрика во внешнее МП, в нем также возникает оптическая анизотропия:  $n_e - n_o = C\lambda_0 H$ .

**Эффект Фарадея.** Оптически неактивная среда принимает под действием внешнего магнитного поля способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль направления поля. Угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации пропорционален длине пути света в веществе,  $l$ , и напряженности,  $H$  МП:  $\varphi = VHl$ . Коэффициент пропорциональности  $V$  называется **постоянной Верде**.

## 53 Оптическое излучение

### Классическая модель затухающего дипольного осциллятора

Уравнение затухающих вынужденных колебаний излучающей дипольной системы имеют вид  $\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}$ , где  $\tau$  – время затухания свободных колебаний электрона. ( $X(t) = x_0 \exp(-t/(2\tau)) \cos \omega_0 t = A_0 \cos \omega_0 t$ ). Дипольный момент электрона  $\vec{p} = \vec{r}e$ ,  $\Rightarrow \ddot{\vec{p}} + \frac{1}{\tau}\dot{\vec{p}} + \omega_0^2\vec{p} = \frac{e^2}{m}\vec{E}$ . Решение:  $\vec{E} = \frac{1}{r^3}\vec{r} \times [\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)]$ .

Интенсивность излучения зависит от угла  $\theta$  между излучением и перпендикуляром к плоскости колебаний:  $I = A \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta$ ,  $A = \frac{q^2 A_0^2}{8\pi c^3}$ , где  $A_0$  – амплитуда колебаний осциллятора.

Постоянную  $\tau$  можно оценить, зная начальную энергию осциллятора,  $W$ , и мощность излучения,  $P$ :  $\tau = W/P$ .  $W = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$ ,  $P = \int I d\sigma = \frac{1}{3c^3}e^2 A_0^2 \omega^4$ ,  $\Rightarrow \tau = \frac{3mc^3}{2e^2 \omega^2} \sim 10^{-8}$  с. Эксперименты подтверждают такое значение времени затухания.

### Лоренцева форма линии излучения

Согласно модели Лоренца,  $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} \vec{f} \vec{E}$ , где  $\vec{f}$  – нормаль, характеризующая направление движения электрона. Решением этого уравнения является Лоренцева форма:

$$S_0(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{a_0^2/4}{\Gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2},$$

где  $\Gamma$  – ширина спектральной линии,  $\Omega = \langle n \rangle / T$  – средняя частота следования импульсов от совокупности излучателей.

**Естественное уширение** линий обусловлено затуханием колебаний осцилляторов. Естественный спектр имеет лоренцеву форму, центральную частоту  $\omega_0$  и ширину  $\Gamma = 1/\tau$ . Т.к.  $\tau \sim 10^{-8}$ , ширина линии за счет уширения  $\Delta f = \Gamma/(2\pi) \sim 10^7$  Гц.

## Термодинамические системы статистически независимых осцилляторов. Модель абсолютно черного тела

На каждую СС независимых излучающих осцилляторов приходится по  $\frac{1}{2}kT$  тепловой энергии. **Тепловое излучение** — электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии тела. Тепловое излучение является единственным видом излучения, которое может находиться в состоянии ТД равновесия с веществом. Расход энергии на излучение компенсируется поглощением внешней энергии.

**Спектральная плотность объемной энергии:**  $\rho(\nu, T) = \frac{dw}{d\nu}$ . Равновесное излучение является изотропным.  $dW = \frac{c}{4}\rho(\nu, T) d\nu$ .

**Испускательная способность:**  $r_\nu = \frac{dW}{d\nu}$ ,  $r_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}$ ,  $\Rightarrow r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}r_\nu$ . Энергетическая **светимость** тела:  $R = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda$ . **Поглощающая способность:**  $a_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}} \leq 1$ .

**Абсолютно черным телом (АЧТ)** называют тело, полностью поглощающее падающее на него излучение:  $a_\nu^* = 1$ .

Согласно принципу **детального равновесия**, для АЧТ  $dW_{\text{изл}} = dW_{\text{погл}}$ . Т.к.  $dW_{\text{погл}} = a_\nu \frac{c}{4}\rho(\nu, T) d\nu$ ,  $dW_{\text{изл}} = r_\nu d\nu$ , получим **закон Кирхгофа**:

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* = \frac{c}{4}\rho(\nu, T).$$

Функция  $r_\nu^*$  называется **функцией Кирхгофа**.

## Закон Стефана–Больцмана. Закон смещения Вина. Формулы Вина и Рэлея–Джинса

Согласно **закону Стефана–Больцмана**, энергетическая светимость АЧТ пропорциональна четвертой степени его температуры:  $R_e = \sigma T^4$ , где  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$  – **постоянная Стефана–Больцмана**.

**Максимум излучения АЧТ, согласно закона смещения Вина**, зависит от его температуры следующим образом:  $\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$ .

Эмпирически для функции Кирхгофа были получены приближения для длинноволновой и коротковолновой областей излучения: **формула Рэля–Джинса** и **формула Вина** соответственно. Формула Вина:  $r_\nu^* = \nu^3 \varphi(\nu/T)$ . Формула Рэля–Джинса:  $r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$ .

Данные приближения справедливы лишь для указанных областей длин волн, в противоположных областях они несправедливы. Кроме того, обе формулы терпят крах при  $\nu \rightarrow \infty$ : в этом случае светимость АЧТ стремится к бесконечности («**ультрафиолетовая катастрофа**»).

## Формула Планка

Пусть  $\langle \mathcal{E}_\nu \rangle$  – средняя энергия гармонического осциллятора. Тогда функция Кирхгофа  $r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \mathcal{E}_\nu \rangle$ . Согласно гипотезе Планка, энергия осцилляторов квантуется:  $\mathcal{E}_{\nu_n} = n\mathcal{E}_{\nu_0} = nh\nu$ , где  $h$  – **постоянная Планка**.

Согласно распределению Больцмана, вероятность нахождения квантовой системы в  $n$ -м состоянии равна  $p_n = \mathfrak{C} \exp(-n\mathcal{E}_{\nu_0}/[kT])$ , где  $\mathfrak{C} = (\sum \exp \frac{-n\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT})^{-1}$  – нормировочный коэффициент. Тогда получим:

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \sum p_n n \mathcal{E}_{\nu_0} = -\mathcal{E}_{\nu_0} \frac{\frac{d}{d\xi} \sum \exp(-n\xi)}{\sum \exp(-n\xi)} = -\mathcal{E}_{\nu_0} \frac{d}{d\xi} \ln \sum \exp(-n\xi),$$

где  $\xi = \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}$ . Т.к.  $\sum \exp(-n\xi) = (1 - \exp[-\xi])^{-1}$ ,  $-\ln \sum \exp(-n\xi) = \ln(1 - \exp[-\xi])$ ,  $\Rightarrow$

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{\exp(\frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}) - 1}, \quad \text{и} \quad r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{\exp(\frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}) - 1}.$$

Для спектральной плотности объемной энергии получим **формулу Планка**:

$$\rho = \frac{4}{c} r_\nu^* = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}.$$

Найдя предельные случаи формулы Планка при  $\nu \rightarrow 0$  и  $\nu \rightarrow \infty$ , получим формулы Рэля–Джинса и Вина соответственно. В частности, можно найти вид не установленной Вином функции  $\varphi(\nu/T)$ :  $r_\nu^* = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \exp(-\frac{h\nu}{kT})$ .

## 54 Излучение света атомами и молекулами

### Модель двухуровневой системы. Спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Рассмотрим атом с двумя энергетическими уровнями:  $W_1$  и  $W_2$ . Пусть  $N_i$  — число атомов на  $i$ -м энергетическом уровне,  $N_i = C \exp(-W_i/[kT])$ . Согласно модели Планка, переход с верхнего энергетического уровня,  $W_1$ , на нижний,  $W_2$ , сопровождается излучением кванта света с энергией  $h\nu = W_2 - W_1$ .

Пусть в нашей двухуровневой системе имеется  $N_1$  атомов, находящихся на уровне  $W_1$ , и  $N_2$  атомов на уровне  $W_2$ . Согласно Эйнштейна, возможны следующие типы энергетических переходов:

- **спонтанное излучение** с вероятностью  $P_{21}^{\text{сп}} = A_{21}N_2$ ;
- **вынужденное поглощение** с вероятностью  $P_{12}^{\text{вын}} = B_{12}N_1\rho(\nu, T)$ , где  $\rho(\nu, T)$  — спектральная плотность внешней энергии;
- **вынужденное излучение** с вероятностью  $P_{21}^{\text{вын}} = B_{21}N_2\rho(\nu, T)$ .

Коэффициенты  $A$  и  $B$  называют **коэффициентами Эйнштейна**.

В состоянии равновесия  $P_{21}^{\text{сп}} + P_{21}^{\text{вын}} = P_{12}^{\text{вын}}$ ,  $\Rightarrow A_{21}N_2 + B_{21}N_2\rho = B_{12}N_1\rho$ .

Тогда получим:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp \frac{h\nu}{kT} - 1}.$$

Используя приближения Рэлея–Джинса получим:  $B_{12} = B_{21}$ ,  $A_{21}/B_{21} = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3}$ .

Аналогично можно рассмотреть процесс излучения многоуровневыми системами. В данном случае необходимо ввести коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$  и  $B_{nm} = B_{mn}$ ;  $A_{mn}/B_{mn} = 8\pi h \nu^3 c^{-3}$ .

## Явление люминесценции

**Люминесценция** — излучение света телами, превышающее тепловое излучение при той же температуре. Длительность люминесценции значительно превосходит длительность излучения атомных систем. Люминесцирующие вещества называют люминофорами. Люминесцентное излучение является неравновесным: оно вызывается центрами люминесценции — возбужденными атомами и молекулами.

**Флуоресценция** — люминесценция, прекращающаяся сразу после прекращения действия возбуждающего излучения (флуоресцирующие вещества излучают более в длинноволновом диапазоне, чем падающее излучение).

**Фосфоресценция** — люминесценция, сохраняющаяся длительное время после прекращения действия возбуждающего излучения.

Для люминесценции существует **правило Стокса**:  $h\nu_{\text{падающ}} - h\nu_{\text{излуч}} = W$ , где  $W$  — некоторая энергия. В зависимости от знака  $W$  люминесценцию делят на **стоксово** и **антистоксово** излучение: при  $W > 0$  и  $W < 0$  соответственно. В случае антистоксова излучения дополнительная энергия черпается из тепловой энергии тела.

## Резонансное усиление света. Лазеры

Явление вынужденного излучения эквивалентно отрицательному поглощению света. При этом сохраняется частота, направление распространения, фаза и поляризация возбуждающего излучения. Следовательно, вынужденное излучение строго когерентно с вызвавшей его причиной.

Однако, если большое число атомов квантовой системы находится на основном энергетическом уровне, происходит поглощение света, сопутствующее переходом атомов в возбужденное состояние.

Если при прохождении через среду интенсивность света возрастает, среда называется усиливающей (активной) или *средой с отрицательным поглощением*. Для среды с инверсной заселенностью уровней справедлив **закон Бугера–Ламберта–Фабриканта**:  $I = I_0 \exp(ax)$ ,  $a > 0$ .

Процесс перехода среды в инверсное состояние называется **накачкой**. Число актов вынужденного излучения пропорционально количеству атомов, находящихся в возбужденном состоянии. При  $N_2 > N_1$  число актов излучения превосходит число актов поглощения, наблюдается вынужденное излучение, мощность которого превосходит мощность вынуждающего. При этом активная (накачанная) среда не нуждается в возбуждающем излучении: при наличии хотя бы одного акта излучения возникает цепная реакция перехода атомов в основное состояние, сопровождающаяся излучением плоскополяризованного высококогерентного излучения (резонансное усиление света).

Устройство, в основе работы которого лежит резонансное усиление света, — лазер, — наиболее удобно рассматривать по классической трехуровневой схеме. Лампой накачки с частотой  $\nu > \nu_{\text{лаз}}$  атомы переводятся в возбужденное состояние, откуда они совершают безызлучательные переходы на квазистабильный уровень, время жизни на котором достаточно велико для создания инверсной заселенности уровней. По истечении времени жизни на квазистационарном уровне хотя бы один атом совершает переход в основное состояние, при котором излучается квант света. При попадании данного кванта в любой из возбужденных атомов происходит вынужденное излучение на той же частоте. В результате лавинообразного вынужденного излучения возникает мощный кратковременный импульс лазерного излучения. Для увеличения мощности излучения тело лазера помещается между двумя стенками, одна из которых является зеркальной, а вторая имеет коэффициент отражения немногим меньший единицы, через нее и выходит лазерное излучение.

## Моды лазера. Синхронизация мод

Основными элементами оптических квантовых генераторов (лазеров) являются: активный элемент с инверсной насыщенностью, резонатор (параллельные зеркала) и источник накачки. Резонатор играет роль не только усилителя, но и селектора фотонов, движущихся параллельно оси лазера (в результате чего лазерный луч обладает малой пространственной расходимостью).

Для самовозбуждения активного элемента необходимо обеспечить баланс амплитуд и фаз. Баланс амплитуд заключается в том, что  $R_1 R_2 \exp(GL) \geq 1$ , где  $R$  – коэффициенты отражения зеркал резонатора,  $G$  – коэффициент усиления света,  $L$  – длина тела лазера. Баланс фаз:  $L = n\lambda/2$ , т.е. в теле лазера должно обеспечиваться условие возникновения стоячих волн, набег фаз будет составлять  $2\pi$ , что в наилучшей степени способствует усилению света.

Согласно фазового условия,  $\nu_n = n\Delta\nu$ , где  $\Delta\nu \frac{1}{2}L$  – **собственные моды лазера**. Количество мод зависит от соотношения  $\Delta\nu$  и ширины спектрального диапазона лазера,  $\Delta\nu_y$ :  $M = \Delta\nu_y / \Delta\nu$ .  $\Delta\nu_y$  определяется доплеровским уширением линий,  $\Delta\nu \sim 10^0 \div 10^3 \text{ см}^{-1}$ ,  $M \sim 10^0 \div 10^4$ . Таким образом, излучение лазера является **многомодовым**.

Для получения одномодового импульса используют селектор (призму, дифракционную решетку) и диафрагму.

Если узкополосный одномодовый лазер генерирует колебания синусоидальной формы, то временной ход излучения зависит от того, каковы амплитуды и фазы различных мод. Существует два противоположных случая: моды могут быть полностью независимыми (оптический шум), либо же синхронизированными.

При синхронизации мод генерируется короткий импульс с интенсивностью  $I_{max} = I_0 M^2$ . Период следования максимальных импульсов называется *межмодовым интервалом*  $T = \Delta\nu^{-1} = 2L/c$ . Т.о., в данном случае через одинаковые промежутки времени,  $T$ , из резонатора будут выходить короткие мощные импульсы. Синхронизатором мод может быть *насыщающийся поглотитель*, помещенный внутрь резонатора, прозрачный только для мощных коротких импульсов (пассивная синхронизация мод).

Предельная длительность импульса,  $\Delta t = (c\Delta\nu_y)^{-1}$ , зависит от ширины спектральной полосы усиления лазера.

Характеристиками излучения лазера являются: основная длина волны, энергия импульса, его длительность, мощность непрерывной работы, ширина спектральной полосы, диапазон перестройки основной длины волны, угловая расходимость излучения (которая близка к дифракционному пределу). Пи-

ковый поток мощности в луче лазера составляет порядка  $10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup> (напряженность ЭП на мишени достигает  $10^{11}$  В/см – больше, чем внутри атомов).

## 55 Дуализм явлений микромира. Дискретные свойства волн. Волновые свойства частиц

### Кванты излучения

Рассмотрим ЭМ излучение в изолированной полости с изотермическими стенками, находящееся в состоянии равновесия с веществом. Спектральная плотность излучения  $d\rho_\nu = \rho(\nu, T) d\nu$ . При равновесии она будет изотропна. Излучение не будет зависеть от природы стенок. Поток энергии в полости  $dj = \frac{c\rho}{4\pi} d\Omega$ .

Согласно гипотезе Планка, излучение распространяется не непрерывно, а элементарными сгустками энергии — **квантами**. Энергия кванта излучения  $E_\gamma = h\nu$ , где  $h$  — **постоянная Планка**,  $\nu$  — частота излучения. Спектральная плотность равновесного излучения абсолютно черного тела распределена согласно **формулы Планка**:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

### Фотоэффект

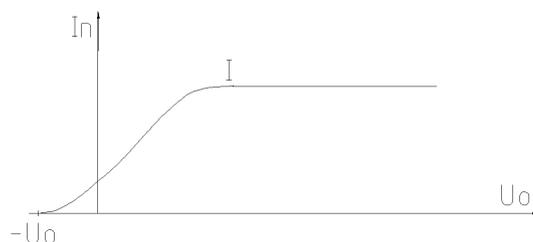
**Внешний фотоэффект** (фотоэмиссия) — испускание веществом свободных электронов под действием электромагнитного излучения. **Внутренний фотоэффект** — перераспределение электронов в веществе по энергетическим уровням под воздействием внешнего ЭМП. **Фотопроводимость** — увеличение электронной проводимости вещества под действием света.

ВАХ фотоэффекта (см. рис.) имеет зону насыщения, когда количество электронов, испускаемых за единицу времени фотокатодом, достигает постоянного предельного уровня  $n_{max}$ . Ток насыщения  $I_{max} = en_{max}$ . Запирающее

напряжение  $-U_0$  объясняется существованием некоторой предельной скорости испускаемых фотоэлектронов:  $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_0$ .

### Законы внешнего фотоэффекта (Столетова):

1. Фототок насыщения при неизменном спектральном составе освещения пропорционален освещенности фотокатода,  $I_{max} \propto E_{cat}$ .
2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты падающего на фотокатод излучения и не зависит от его интенсивности.
3. Существует **красная граница фотоэффекта** (существует некоторая минимальная частота внешнего излучения,  $\nu_{min}$ , при котором начинается фотоэффект).



Закон сохранения энергии при фотоэффекте носит название **уравнения Эйнштейна**:

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2},$$

где  $A$  – **работа выхода фотоэлектрона**,  $A = h\nu_{min}$ , где  $\nu_{min}$  – красная граница фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна объясняет все три закона Столетова.

*Фотоэффект безынерционен.* Он возникает сразу же, как только ЭМ волна взаимодействует с поверхностью проводника.

Помимо классического, одноэлектронного, фотоэффекта, возможен **многоэлектронный фотоэффект**, когда несколько квантов излучения выбивают один фотоэлектрон. В этом случае уравнение Эйнштейна примет вид:  $Nh\nu = A + \frac{1}{2}mv_{max}^2$ .

## Рассеивание ЭМ излучения на свободных зарядах. Тормозное рентгеновское излучение

**Эффект Комптона** — изменение длины волны,  $\lambda$ , рентгеновских фотонов при их взаимодействии с рассеивающим веществом, содержащим легкие атомы:  $\Delta\lambda = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , где  $\lambda_K = h/(m_e c)$  — **комптоновская длина волны электрона**,  $\theta$  — угол отклонения рентгеновского кванта.

Кинетическая энергия отдачи, испытываемой электроном при эффекте Комптона, равна

$$W = h\nu \frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \text{где} \quad a = \frac{\lambda_K}{\lambda}.$$

Следует отметить, что свободные заряды способны лишь изменять энергию падающих на них квантов ЭМ излучения, тратя часть первоначальной энергии кванта на увеличение собственной кинетической энергии. Полностью поглощать квант излучения способны лишь связанные электроны. При этом поглощение сопровождается переходом электрона на более высокий энергетический уровень.

При торможении веществом быстрых электронов (или других заряженных частиц) возникает **тормозное излучение**, имеющее сплошной спектр с границей  $\nu_{max} = W_k^{(e)}/h$ , где  $W_k^{(e)}$  — начальная кинетическая энергия электрона.

## Частицы и волны. Гипотеза де Бройля

Согласно **гипотезе корпускулярно-волнового дуализма**, электромагнитное излучение обладает свойствами частиц (это доказывается существованием фотоэффекта, светового давления). Де Бройль предположил, что корпускулярно-волновой дуализм имеет и обратный эффект: все частицы, движущиеся в данной системе отсчета, обладают волновыми свойствами. Их длина волны (**длина волны де Бройля**),  $\lambda_{dB} = h/p = h/(mv)$ , или  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , где  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $k$  — волновое число тела.

Выражая через кинетическую энергию,  $W_k$ , получим:  $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2mW_k}$ . Для электрона, ускоряющегося под действием разности потенциалов  $U$ ,  $\lambda_{dB} = 12.25/\sqrt{U}\text{Å}$ .

Формула де Бройля подтверждается опытами по рассеянию электронов и других частиц на кристаллах, дифракции электронов.

У макротел  $\lambda_{dB} \sim 0$ , поэтому их волновые свойства не обнаруживаются.

*Фазовая скорость волн де Бройля*  $v_p = \omega/k = c^2/v$ ,  $v_p = c^2m\lambda_{dB}/h$ . Т.к.  $c > v$ , то фазовая скорость волн де Бройля превышает скорость света. Зависимость фазовой скорости волн де Бройля от длины волны означает, что они испытывают дисперсию.

*Групповая скорость волн де Бройля*  $u = \frac{d\omega}{dk} = v$  совпадает со скоростью тела (что и следовало ожидать).

Волны де Бройля имеют статистический смысл: квадрат модуля амплитуды дебройлевской волны равен вероятности обнаружения частицы в данной точке.

В квантовой физике наблюдаются характерные закономерности. Например, координата и импульс частицы не могут быть одновременно известны с доподлинной точностью:  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ , аналогично,  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ . Эти соотношения называются **соотношениями неопределенности Гайзенберга**.  $\Delta x \Delta v_x \geq \hbar/(2m)$  — чем больше масса тела, тем меньше неопределенность измерения его координат и скоростей, т.е. тем большее право мы имеем применить к нему понятие траектории.

## Опыты Девиссона–Джермера и Томсона

**Опыт Девиссона–Джермера** заключается в изучении отражения электронов от монокристалла никеля. Рассеяние электронов было наиболее эффективным при некотором угле  $\varphi$ , соответствующем отражению электронов от атомных плоскостей. Зная период кристалла,  $d$ , можно вычислить длину волны, соответствующую первому дифракционному максимуму для данной длины волны:  $2d \sin \theta = \lambda$ . Полученная длина волны ( $1.65\text{Å}$ ) совпала с дебройлевской длиной волны электрона.

**Томсон и Тартаковский** (независимо) получили дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу.

Штерн показал, что аналогично рассеиваются атомные и молекулярные пучки.

Биберман, Сушкин и Фабрикант провели эксперимент, в котором интенсивность потока электронов была столь малой, что через узкую щель они проходили по одиночке (цель опыта – избавиться от кулоновского взаимодействия электронов). При этом также наблюдалась дифракционная картина.

Все эти опыты наглядно доказывают двусторонний характер корпускулярно–волнового дуализма.

## Эффект Черенкова–Вавилова

**Излучением Черенкова–Вавилова** называют излучение света заряженной частицей, возникающее при ее движении в среде с постоянной скоростью  $v$ , превышающей фазовую скорость света в этой среде.

Возникновение эффекта Черенкова–Вавилова можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса. Если частица движется в среде со скоростью  $v < c$ , испущенные ею в разные моменты времени парциальные волны не взаимодействуют и не имеют общей огибающей, т.е. заряд при этом не излучает. Однако, если  $v > c$ , соответствующие разным парциальным волнам сферы пересекаются. Их общая огибающая представляет собой конус с вершиной, совпадающей с положением частицы. Нормали к образующим конуса определяют волновые векторы, т.е. направление распространения света. Угол  $\theta$ , который составляет волновой вектор с направлением движения частицы, удовлетворяет отношению  $\cos \theta = u/v = c/(nv)$ .

## Циклотронное и синхротронное излучение

**Циклотронное излучение** является электромагнитным излучением заряженной частицы, движущейся по окружности или спирали в МП, один из видов магнитотормозного излучения. Обычно данный термин применяют

к излучению нерелятивистских частиц, происходящему на основной циклотронной частоте и ее первых гармониках (см. *плазма*).

**Синхротронное излучение** является магнитотормозным излучением релятивистских частиц, движущихся в однородном МП. В связи с высокой скоростью частиц, сильно преобладает излучение на высших гармониках циклотронной частоты, что приводит к квазинепрерывному спектру излучения.

Синхротронное излучение распространяется в узком конусе с углом раствора  $\psi \propto mc^2/E$ , где  $m$  – масса покоя частицы,  $E$  – ее энергия. Полная мощность синхротронного излучения пропорциональна квадрату энергии частицы, квадрату перпендикулярной скорости составляющей МП и обратно пропорциональна четвертой степени массы частицы. Эта зависимость приводит к тому, что синхротронное излучение наиболее существенно для легких частиц.

## Рассеяние ЭМВ на свободных электронах

**Эффектом Комптона** называют рассеяние ЭМВ на свободном электроне, сопровождающееся уменьшением частоты. Эффект хорошо наблюдается для высокочастотного излучения (рентгеновский диапазон и выше).

Теория эффекта разработана Комптоном и Дебаем. Для его объяснения пришлось предположить, что ЭМВ представляют собой потоки фотонов. Каждый фотон обладает энергией  $E = h\nu$  и импульсом  $p = (h/\lambda)\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – орт распространения света. Исходя из законов сохранения, Комpton получил формулу для сдвига длины волны:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta),$$

где  $\lambda'$  – длина волны после рассеяния,  $\theta$  – угол рассеяния. Параметр  $\frac{h}{m_e c}$  называют **комптоновской длиной волны** электрона ( $2.4 \cdot 10^{-12}$  м).

## Лазеры на свободных электронах

В лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) активной средой является поток электронов, колеблющихся под действием внешнего электромагнитного поля и перемещающихся с релятивистской скоростью  $v_{\parallel}$  в направлении распространения излучаемой волны.

Благодаря эффекту Доплера частота излучения электронов в ЛСЭ во много раз превышает частоту колебания электронов,  $\Omega$ :

$$\omega \simeq s\Omega / \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \varphi\right),$$

где  $s$  – номер гармоники,  $\varphi$  – малый угол между направлением движения электронов и направлением излучения волны:  $\varphi \lesssim \sqrt{1 - (v/c)^2}$ ,  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ .

Достоинством ЛСЭ является возможность плавной перестройки частоты генерации изменением  $v_{\parallel}$  или  $\varphi$ .

При квантовом описании возможность преобладания в ЛСЭ вынужденного излучения над поглощением объясняется небольшим различием частот волн, которые электрон способен излучить и поглотить. Это различие обусловлено отдачей, испытываемой электроном при излучении или поглощении кванта. Т.к. в реальных условиях естественная ширина линии существенно больше разности этих частот, вынужденное поглощение и излучение раздельно не наблюдаются, а преобладание излучения имеет место для волны, частота которой ближе к излучаемой частоте.

Т.к. излученный  $\gamma$ -квант обладает энергией, значительно меньшей энергии электрона, один электрон может излучить значительное количество квантов. Поэтому движение и излучение частиц могут быть описаны уравнениями классической электродинамики. В классическом описании вынужденному излучению в ЛСЭ отвечает самосогласованный процесс группировки электронов в сгустки под действием затравочной волны и последующее усиление этой волны в результате когерентного излучения сгустков.

Атомная и ядерная физика,  
элементарные частицы

## 56 Элементарная теория атома водорода

### Проблема устойчивости атома в планетарной модели. Закономерности в излучении атома водорода

Бальмер обнаружил, что для атома водорода длины волн спектральных линий в видимой и близкой УФ областях расположены согласно закону  $\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$ , где  $n = 3, 4, 5, \dots$ . Для частот эта формула примет вид

$$\omega = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } R - \text{ постоянная Ридберга.}$$

Дальнейшие исследования показали, что в спектре водорода имеется еще несколько серий. В УФ части спектра находится серия Лаймана. Остальные серии лежат в инфракрасной области. Линии этих серий могут быть представлены в виде аналогичных формул.

В общем случае придем к формуле  $\omega_{nm} = T_1(m) - T_2(n)$ , где  $T(x) = R/x^2$  — **спектральный терм**  $n = \overline{m + 1, \infty}$ . Значение  $m$  составляет: 1 для **серии Лаймана**, 2 для **серии Бальмера**, 3 для **серии Пашена**, 4 для **серии Брэкета**, 5 для **серии Пфунда** и т.д.

Данная обобщенная формула Бальмера является математическим изложением **комбинационного принципа**. Комбинационному принципу можно дать несколько иную формулировку: *если известны волновые числа двух спектральных линий одной и той же серии, то их разность будет также волновым числом некоторой третьей спектральной линии, принадлежащей тому же атому.*

На основе данных закономерностей сложилась **модель атома Томсона**. Согласно ей, атом является равномерно заполненным положительным зарядом шаром, внутри которого находятся отрицательно заряженные валентные электроны.

Данная модель была опровержена опытами по рассеянию  $\alpha$ -частиц на атомах металлов. Область, заряженная положительно, оказалась очень небольшой по сравнению с эффективным размером атома. Появилась **планетарная**

**модель атома.** В этой модели атом состоит из положительно заряженного ядра, занимающего очень небольшую область пространства, вокруг которого вращаются электроны.

Однако, классическая физика уперлась в тупик, пытаясь доказать возможность существования планетарной модели. Система движущихся зарядов, согласно классической физике, должна излучать (чего не наблюдается). При излучении энергия зарядов постепенно снижается, в результате чего, в конце-концов, такая система окажется разрушенной, т.к. электрон, постепенно теряя свою кинетическую энергию, упадет на ядро.

## Постулаты Бора. Принцип соответствия

Для обоснования планетарной модели Нильс Бор ввел три допущения, позволяющих рассматривать данную систему как устойчивую. Данные допущения носят название **постулатов Бора**.

1. (Постулат стационарных состояний): *в атоме существует набор стационарных состояний, находясь в которых атом не излучает ЭМВ.* Стационарным состояниям соответствуют стационарные орбиты, по которым ускоренно движется электрон, не излучая при этом.
2. (Правило квантования орбит): *в стационарном состоянии атома электрон, движущийся по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса:  $L_k = mvr = k\hbar$ , где  $k$  равно числу дебройлевских длин волн электрона, укладываемых на длине круговой орбиты:  $k = 2\pi r / \lambda_{dB} = rmv / \hbar$ .*
3. (Правило частот): *при переходе атома из одного стационарного состояния,  $n$ , в другое,  $m$ , происходит излучение или поглощение фотона  $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$ , где  $W$  – энергия атома в стационарном состоянии.*

Правило квантования орбит получено из **постулата Планка**:  $W_n = n\hbar\omega$ . Пусть  $q$  – координата гармонического осциллятора,  $p$  – его импульс. Тогда

$W_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega q^2}{2} = n\hbar\omega$ . Получили уравнение эллипса:

$$\frac{q^2}{2n\hbar/(m\omega)} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1.$$

Полуосями эллипса являются параметры  $a = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}$  и  $b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$ .

Площадь эллипса  $S_n = \pi ab = 2\pi\hbar n = hn$ . Между тем,  $S_n = \oint p dq = hn$ . Для электрона в качестве  $q$  естественно взять фазу колебания  $\varphi$ , а  $p = L$  – момент импульса электрона. Тогда получим:  $\oint L d\varphi = hn$ . Т.к. сила, с которой ядро действует на электрон, уравновешивает центробежную силу, получим:  $L = \text{const}$ ,  $\Rightarrow 2\pi L = 2\pi\hbar n$ ,  $\Rightarrow \boxed{L = n\hbar}$ . Что означает квантование момента импульса электрона.

Согласно **принципу соответствия**, всякая более общая теория содержит в себе менее общую, как предельный случай. Например, предельным случаем преобразований Лоренца являются преобразования Галилея. В **формулировке Бора** принцип соответствия звучит так: *выводы и результаты квантовой механики при больших квантовых числах должны соответствовать классическим результатам*. Действительно, при очень больших квантовых числах энергия электрона изменяется квазинепрерывно, что позволяет использовать методы классической механики.

## Опыты Франка и Герца

Существование дискретных энергетических уровней атома подтверждается опытами, осуществленными Франком и Герцем.

В трубке, заполненной парами ртути под небольшим давлением ( $\sim 1$  мм рт. ст.), имелись три электрода: катод, сетка и анод. Электроны, вылетающие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии, ускорялись разностью потенциалов, приложенной между катодом и сеткой. Эту разность потенциалов можно было плавно менять с помощью потенциометра. Между сеткой и анодом создавалось слабое электрическое поле, тормозившее движение электронов к аноду. Исследовалась зависимость силы тока в цепи анода от напряже-

ния между катодом и сеткой. Эксперимент показал, что сила тока вначале монотонно возрастала, достигая максимума, после чего с дальнейшим увеличением напряжения резко падала, достигая минимума, и снова начинала расти.

Такой ход кривой объясняется тем, что вследствие дискретности энергетических уровней атомы могут воспринимать энергию только порциями  $\Delta E$ , соответствующими разности энергий стационарных состояний. До тех пор, пока энергия электрона меньше  $\Delta E$ , соударения между электроном и атомом ртути носят упругий характер, и энергия электрона при столкновениях практически не изменяется. Часть электронов попадает на сетку, остальные же, проскочив через сетку, достигают анода, создавая ток в цепи гальванометра. Чем больше скорость, с которой электроны достигают сетки (т.е. чем больше  $\Delta E$ ), тем большей будет доля электронов, проскочивших через сетку, и тем, следовательно, большей будет сила тока. Когда энергия, накапливаемая электроном в промежутке катод–сетка, достигает значения  $\Delta E$ , соударения перестают быть упругими — электроны при ударах об атомы передают им энергию, и продолжают затем двигаться с меньшей скоростью. Поэтому число электронов, достигающих анода, уменьшается.

Атомы, получившие при соударении с электронами энергию  $\Delta E$ , переходят в возбужденное состояние, из которого они спустя время порядка  $10^{-8}$  с возвращаются в основное состояние, излучая фотон с частотой  $\omega = \Delta E/\hbar$ . При напряжении, превышающем 9.8 В, электрон на пути катод – анод может дважды претерпеть неупругое соударение с атомами ртути, теряя при этом энергию 9.8 эВ, вследствие чего сила тока снова начнет уменьшаться. При еще большем напряжении возможны трехкратные неупругие соударения электронов с атомами, что приводит к возникновению максимума при  $U = 14.7$  В, и т.д.

## Изотопический эффект

С учетом движения в атоме водорода и электрона, и ядра относительно общего центра инерции, в формулах, описывающих движение электрона вокруг

ядра, под массой электрона,  $m_e$  следует понимать **приведенную массу** системы электрон–ядро:

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}},$$

где  $M$  – масса ядра.

С учетом движения ядра постоянная Ридберга имеет наименьшее значение для атома водорода; предельного значения она достигает при  $M = \infty$ . Вследствие различия значений  $R$  для разных  $M$  в спектрах проявляется **изотопический эффект**, связанный с существованием нескольких изотопов одного и того же химического элемента.

Для смеси изотопов этот эффект состоит в наличии дополнительных спектральных линий к линиям атомов, ядра которых принадлежат изотопу с наибольшей распространенностью. Интенсивности этих линий относятся, как процентные содержания изотопов в веществе, а длины волн смещены друг относительно друга для изотопов с массами  $M'$  и  $M''$  на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{m_e(M'' - M')}{(\frac{1}{2}[M' + M''])^2}.$$

С другой стороны,  $\Delta\lambda/\lambda = (R_1 - R_2)/R_1$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – постоянные Ридберга для обоих изотопов.

При взаимодействии отрицательных мюонов с веществом, атомные ядра могут захватывать мюоны на свои орбиты, образуя с ними **мезоатомы**. Поведение мюонов в атомах существенно не отличается от поведения электронов, за исключением малой продолжительности жизни мюонов. Атомные электроны не оказывают сильного влияния на движение мюона в атоме. Малый радиус мюонной орбиты и его уменьшение с ростом заряда ядра приводят к тому, что уже при  $Z \approx 30$  мюоны должны проникать в ядро. На энергетических уровнях мюона поэтому сказываются размеры и структура ядра, которое в этом случае уже нельзя считать точечным, как это делается при решении уравнения Шрёдингера для атома.

При замедлении позитронов в веществе иногда образуется **позитроний** – система из позитрона и электрона, движущихся вокруг общего центра тяжести. Позитрон нельзя считать неподвижным, так как его масса равна массе

электрона. Радиусы орбит в позитронии вдвое больше радиусов соответствующих орбит в атоме водорода, а энергия связи позитрония вдвое меньше энергии связи атома водорода. В зависимости от ориентации спинов электрона и позитрона возникают два состояния позитрония: *ортосостояние* при параллельной ориентации спинов и *парасостояние* при их антипараллельной ориентации

## Водородоподобные ионы. Релятивистское обобщение модели Бора. Постоянная тонкой структуры

Для атома водорода энергия  $n$ -го уровня  $E_n = -R/n^2$ . Постоянная Ридберга  $R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$ . **Водородоподобными ионами** являются ионы атомов со степенями ионизации, равными  $N - 1$ , где  $N$  – порядковый номер атома. Такими ионами являются, например,  $\text{He}^+$  ( $\text{He}^I$ ),  $\text{Li}^{II}$ ,  $\text{Be}^{III}$  и т.д. Т.е. это атомы с одним единственным электроном.

Спектральная структура водородоподобных ионов сильно похожа на структуру спектра атома водорода. Для них получена **формула Бальмера–Ридберга**:

$$E_{nm} = Z^2 R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $Z$  – заряд ядра атома.

Относительно спинового момента электрона атом водорода является вырожденным: все энергетические уровни для электронов, отличающихся лишь спиновыми числами, совпадают. Щелочные металлы, однако, не являются вырожденными относительно спинового числа. Поэтому их спектры содержат несколько серий: *основную* ( $f^{n>4} \rightarrow d^3$ ), *диффузную* ( $d^{n>2} \rightarrow p^3$ ), *резкую* ( $s^{n>3} \rightarrow p^3$ ) и *главную* ( $p^{n>2} \rightarrow s^3$ ), где  $s$ ,  $p$ ,  $d$  и  $f$  – соответствующие электронные орбиты (**термы**). Энергия  $n$ -го уровня для таких атомов в данном случае описывается уравнением  $E_n = \frac{R}{(n + \alpha)^2}$ , где  $\alpha < 0$  – **квантовый дефект**, необходимый для расчетов энергий атома, соответствующих данной серии.

Таким образом, спектр щелочных металлов имеет **тонкую структуру**: большинство линий имеют двойную или бóльшую кратность. Сложные линии, содержащие несколько компонент, называют **мультиплетами**, в отличие от простых одиночных линий — **синглетов**.

Для объяснения тонкой структуры **Гаудсмит** и **Уленбек** выдвинули гипотезу, что электрон обладает собственным моментом импульса — **спином**. Наличие спинового момента и все его свойства вытекают из установленного Дираком уравнения квантовой механики, удовлетворяющего требованиям теории относительности. Т.о., спин является одновременно и квантовым, и релятивистским свойством частиц. Спин электрона  $s_e = \pm\hbar/2$ . Обычно постоянную Планка в выражении для спина опускают, просто говоря, что *электрон обладает полуцелым спином*. Модуль спинового момента  $M = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3}$ . **Спиновое магнитное квантовое число**  $M_{s_z} = m_s\hbar$ .

Так как момент импульса атомного ядра равен нулю, момент импульса атома водорода равен моменту импульса электрона,  $M_e + M_s$ .  $\vec{M}_j = \vec{M}_l + \vec{M}_s$ , где  $M_l$  — **орбитальный момент** электрона,  $j = \overline{l+s, l-s}$ . Из-за **спин-орбитального взаимодействия** энергия атома зависит от взаимной ориентации спинового и орбитального моментов электрона.

Т.о., каждый терм, кроме  $s$ , распадается на дублеты, соответствующие разным ориентациям спина. Согласно **правилам отбора**, при переходе между разными энергетическими состояниями магнитный момент атома изменяется как  $\Delta j = 0, \pm 1$ . В результате при переходе между двумя энергетическими уровнями возникают триплеты (точнее, сложные дублеты).

Тонкая структура энергетических уровней является релятивистским эффектом. Согласно релятивистской квантовой теории, тонкая структура спектра  $\Delta E = \frac{\alpha^2}{16}E_i$ , где  $E_i$  — энергия ионизации атома водорода,  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch} \approx \frac{1}{137}$  — **постоянная тонкой структуры**.

## 57 Основы квантовой механики

### Квантовая система, ее состояние, измеряемые параметры

В основе квантовой теории лежат два принципа: **принцип дискретности** (некоторые физические величины в определенных условиях могут принимать только дискретные значения) и **принцип корпускулярно–волнового дуализма** (микрообъект ведет себя в одних условиях как волна, в других как частица, являясь до опыта и тем и другим, а после опыта ни тем, ни другим в классическом смысле слова).

Под **состоянием квантовой системы** понимают набор характеристик, позволяющих выделить и идентифицировать конкретную физическую систему в конкретных физических условиях. Под **наблюдаемой** понимают любую физическую величину, которая может быть измерена в эксперименте, результатом которого должно быть обязательно действительное число. Под **оператором**  $\hat{F}$  подразумевают правило, посредством которого одной функции,  $\psi$ , сопоставляется другая функция,  $\varphi$ :  $\varphi = \hat{F}\psi$ .

В **фазовом пространстве** (ФП) квантовое состояние системы характеризуется точкой. Если задать положение этой точки относительно начала отсчета ФП, получим **вектор состояния** системы, который обозначается как  $\langle\psi|$  (**бра–вектор**) или  $|\psi\rangle$  (**Кэт–вектор**).

**Собственное состояние** квантовой системы — такое состояние, для которого результаты эксперимента можно представить с полной определенностью. В собственных состояниях физические величины имеют определенные точные значения (*чистые состояния*), а их конкретные значения называются **собственными значениями**,  $\alpha$ .

Для любой наблюдаемой величины  $A$  существует линейный оператор  $\hat{A}$ . Уравнение на собственные значения имеет вид:  $\hat{A}|\psi_i\rangle = \alpha_i|\psi_i\rangle$ .

Совокупность всех собственных значений оператора  $\hat{F}$  образует его **спектр**. Задача нахождения спектра конкретного линейного оператора играет фундаментальную роль в квантовой механике.

Согласно **принципу соответствия**,  $\widehat{f(A)} = f(\hat{A})$ .

## Уравнения Гайзенберга

Если  $|\Psi_0\rangle$  — вектор состояния системы в начальный момент времени, то в представлении Шрёдингера вектор состояния в произвольный момент времени примет вид:  $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi_0\rangle$ , где  $\hat{U}$  — **унитарный оператор эволюции** системы:  $\hat{U}\hat{U}^* = 1$ . Если гамильтониан системы,  $\hat{H}$ , не зависит от времени, среднее значение любой величины  $F$  можно представить в виде среднего значения некоторого оператора  $\hat{F}_0$ , взятого по начальному вектору состояния:

$$\bar{F} = \langle \Psi(t) | \hat{F} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{F}_0 | \Psi_0 \rangle.$$

Оператор  $\hat{F}_0 = \hat{U}^* \hat{F} \hat{U}$  называется оператором физической величины в представлении Гайзенберга. Для любой физической величины,  $G$ , оператор которой коммутирует с гамильтонианом,  $[\hat{G}, \hat{H}] = 0$ ,  $G = G_0$ .

Используя уравнения для оператора эволюции

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}, \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial t} = \hat{U}^* \hat{H},$$

можно найти производную по времени оператора  $\hat{F}_0$ :

$$\frac{\partial \hat{F}_0}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}_0] + \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial t}.$$

Это уравнение и правила коммутации операторов физических величин служат основой квантовомеханического описания динамической системы в представлении Гайзенберга.

Если в качестве векторов состояния выбраны состояния  $\langle n |$  и  $\langle m |$  с определенной энергией  $E_n$  и  $E_m$ , то между матрицами операторов в представлении Шрёдингера и Гайзенберга существует связь:

$$\langle m | \hat{F} | n \rangle = \langle m | \hat{F}_0 | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t), \quad \omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar.$$

Для динамических переменных (например, координат,  $q_i$ , и импульсов,  $p_i$ ) операторные уравнения с учетом коммутационных соотношений,  $[\hat{p}_i, \hat{q}_i] = i\hbar\delta_{ij}$  принимают вид, аналогичный классическим уравнениям Гамильтона

(теорема Эренфеста):

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{q}_i] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}, \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}_i] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i}.$$

## Свойства волновой функции. Уравнение Шрёдингера. Стационарные и нестационарные состояния. Плотность вероятности и плотность потока вероятности

**Линейным** называется оператор  $\hat{A}$ , действие которого на совокупность векторов состояния линейно: для  $|\psi\rangle = \sum c_i |\psi_i\rangle$  выполняется  $\hat{A}|\psi\rangle = \sum c_i \alpha_i |\psi_i\rangle$ .

Помимо линейности, операторы наблюдаемых должны удовлетворять требованию **эрмитовости**:  $\langle \psi | \hat{A} | \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle}$ , т.е. быть самосопряженным.

В векторном представлении основной характеристикой объекта является вектор состояния  $|\varphi\rangle$ , который в более простом (но менее наглядном) случае заменяется скаляром — **волновой функцией**.

Шрёдингер сопоставил движению микрочастицы комплексную функцию координат и времени, которую назвал волновой функцией  $\psi$ . Вид волновой функции является решением **уравнения Шрёдингера** (уШ):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}.$$

Обычно исследуются стационарные состояния системы:  $|\psi(t)\rangle = |\psi\rangle \exp(-iEt/\hbar)$ .

В **стационарном случае** уШ имеет вид:  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ , где  $E$  — энергия системы в данном стационарном состоянии.

Согласно Борну, квадрат модуля волновой функции,  $|\psi|^2$  определяет вероятность нахождения частицы в объеме ФП  $dV$ :  $dP = A|\psi|^2 dV = A\psi^*\psi dV$ , или, для векторов состояния:  $dP = A\langle\psi|\psi\rangle$ , где  $A$  — некоторый нормировочный коэффициент. Для того, чтобы избавиться от  $A$ , можно нормировать волновую функцию:  $\int\langle\psi|\psi\rangle dV = 1$ , в этом случае квадрат модуля волно-

вой функции будет равняться вероятности нахождения частицы в данном элементе объема ФП.

Следует указать, что даже нормированная *волновая функция определена с точностью до фазового множителя*  $\exp(i\alpha)$ : если  $\langle \psi_1 | = \exp(i\alpha) \langle \psi |$ , то  $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle \exp(-i\alpha)$ ,  $\Rightarrow \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$ .

Совокупность волновых функций квантовой системы,  $|\psi_i\rangle$  образует ее **базис**, который должен быть **ортонормированным** ( $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ ) и **полным** (любую волновую функцию  $|\psi\rangle$  системы можно линейно выразить через другие функции базиса:  $|\psi\rangle = \sum c_i |\psi_i\rangle$ , хотя бы одна  $c_i \neq 0$ ).

Движению микрочастицы соответствует перераспределение плотности вероятности,  $\langle \psi | \psi \rangle$ , в ФП. Максимум вероятности как бы «перетекает» из одних точек ФП в другие. Движение частиц в пространстве характеризуется специальной величиной — **плотностью потока вероятности**, которую можно найти, опираясь на основное уравнение квантовой механики.

Определим, как изменяется величина плотности вероятности с течением времени:  $\frac{\partial \langle \psi | \psi \rangle}{\partial t} = -\text{div} |j\rangle$ , где  $|j\rangle = \frac{i\hbar}{2m} (|\psi\rangle \nabla \langle \psi| - \langle \psi| \nabla |\psi\rangle)$ .  $|j\rangle$  и есть вектор плотности потока вероятности, т.к. выражение для производной плотности вероятности совпадает по форме с законом непрерывности тока. Убыль вероятности нахождения частицы в объеме  $V$  равна потоку вектора  $|j\rangle$  через поверхность, ограничивающую объем  $V$ .

В силу условия нормировки, суммарное значение вероятности во всем пространстве  $V$  сохраняется, вероятность лишь может перераспределяться между отдельными областями. Из смысла волновой функции вытекает, что *квантовая механика имеет статистический характер*, т.е. с помощью волновой функции можно лишь предсказать, с какой вероятностью частица может быть обнаружена в различных точках пространства.

Выведем уШ по де Бройлю. Волновую функцию частицы можно представить в виде плоской волны де Бройля:  $\psi = a \exp(-i[\omega t - kx])$ , где  $\omega = E/\hbar$ ,  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ ,  $k = 2\pi/\lambda = mv/\hbar$ ,  $\Rightarrow \psi = a \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$ .  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \psi$ ,  $\Rightarrow E = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ ,  $p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ , а т.к.  $E = \frac{p^2}{2m}$ , получим

уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

которое совпадает с уШ при  $U = 0$ .

$$\text{При } U \neq 0, \frac{p^2}{2m} = E - U, \Rightarrow -\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U, \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

## Операторы физических величин. Среднее значение и дисперсия физической величины

Рассмотрим вид операторов физических величин в координатном представлении, где  $\hat{x} = x$ ,  $\hat{y} = y$ ,  $\hat{z} = z$ . Для этого воспользуемся принципом соответствия:  $\hat{U}(x, y, z) = U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Получим для оператора кинетической энергии:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E\psi, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)}.$$

Оператор импульса:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2), \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_{x,y,z}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (x,y,z)^2}, \quad \boxed{\hat{p}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial (x,y,z)}}.$$

Оператор момента импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \Rightarrow L_{x,y,z} = i[(y, z, x)p_{z,x,y} - (z, x, y)p_{y,z,x}], \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)}.$$

Так как квантовая механика оперирует с вероятностными величинами, то понятие физической величины  $A$  заменяется понятием ее **среднего значения**:

$$\bar{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi dV, \quad \text{или} \quad \bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

### Дисперсия физической величины

$$D_A = \overline{A^2} - \overline{A}^2 = \int \psi^* \hat{A}^2 \psi dV - \left( \int \psi^* \hat{A} \psi dV \right)^2, \text{ или } D = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle)^2.$$

Флуктуация величины  $A$  характеризуется ее **среднеквадратичным отклонением**:  $\sigma_A = \sqrt{D_A}$ , которое можно нормировать:  $\delta_A = \sqrt{D_A}/\overline{A}$ .

Две наблюдаемые называются **совместными**, если изменение одной из них не влияет на изменение другой.  $A$  и  $B$  совместны тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы коммутируют друг с другом:  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ ,  $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) - \hat{B}(\hat{A}|\psi\rangle) = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) - \alpha\hat{B}|\psi\rangle = 0$ , где  $\alpha$  – собственное значение оператора  $\hat{A}$ . Следовательно, вектор  $\hat{B}|\psi\rangle$  также является собственным вектором оператора  $\hat{A}$ , принадлежащим тому же собственному значению  $\alpha$ .

Систему совместных наблюдаемых называют **полной**, если никакие два состояния не имеют одинаковых собственных значений для всех этих наблюдаемых. Т.о., задание собственных значений всех этих наблюдаемых однозначно определяет состояние квантовой системы.

### Гамильтониан. Собственные значения гамильтониана

**Гамильтониан**,  $\hat{H}$ , – оператор полной энергии системы:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{U}.$$

В стационарном случае гамильтониан не зависит от времени, следовательно, уШ превращается в уравнение на собственные значения  $\hat{H}$ :  $\hat{H}|\psi\rangle = E_n|\psi\rangle$ .

Рассмотрим значения энергии частицы, находящейся в бесконечной одномерной прямоугольной потенциальной яме с границами  $x = 0$  и  $x = l$ . За пределами ямы  $\psi \equiv 0$ ,  $\Rightarrow$  получим ГУ:  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ . Внутри ямы  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ ,  $\Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$ .

Пусть  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , тогда  $\psi_{xx} + k^2\psi = 0$ ,  $\Rightarrow \psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$ . Из ГУ  $\Rightarrow \alpha = 0$ ,  $kl = \pm n\pi$ ,  $\Rightarrow k = \pm \pi n/l$ . Получим **спектр значений энергии частицы**:

$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml}$ . Разность между соседними уровнями энергии

$\Delta E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}n$ . Собственные функции:  $\psi_n = a \sin(\pi nx/l)$ . Нормируя, получим:  $\psi = \sqrt{2/l} \sin(\pi nx/l)$ .

Т.о., получили **дискретный** спектр энергии частицы в потенциальной яме. В отличие от частицы в яме, у свободной частицы спектр является **квазинепрерывным**, условно его можно считать сплошным (действительно сплошных спектров, ввиду квантового характера физических процессов, в природе не существует).

Т.о., связанные электроны в атомах при переходах между энергетическими уровнями формируют дискретный электромагнитный спектр вещества. При торможении быстрых электронов излучается квазинепрерывный (сплошной) спектр.

## 58 Одномерные квантовомеханические задачи

### Свободное движение частицы. Гармонический осциллятор

(пример с прямоугольной потенциальной ямой см. в предыдущем вопросе)

**Свободное движение.** При свободном движении частицы  $U = 0$ ,  $\Rightarrow$  уШ примет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, \text{ или } \Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В одномерном случае решение будет представлять собой суперпозицию движущихся противоположно волн:  $\psi = A \exp(-i/\hbar\sqrt{2mE}x) + B \exp(i/\hbar\sqrt{2mE}x)$ , или  $\psi = a \cos(kx + \alpha)$ .

ГУ в данном случае отсутствуют (частица движется из  $-\infty$  в  $+\infty$ ), однако сохраняется требование нормировки. Нахождение нормировочного интеграла невозможно, поэтому зачастую на частицу накладывают дополнительные ГУ, ограничивая область ее движения, пусть большим, но конечным интервалом.

## Линейный гармонический осциллятор

Частица с массой  $m$  колеблется с частотой  $\omega_0$  вдоль оси  $OX$  под действием квазинепрерывной потенциальной силы  $F = -kx$ ,  $k = m\omega^2$ ,  $U = m\omega_0^2 x^2/2$ , уШ:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Решения:  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0$ , при  $n \gg 1$ :  $E_n \approx n\hbar\omega_0$ , как и постулировал Планк.

Собственные функции:  $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2H_n(\chi)}\right)$ , где  $\chi = \frac{x}{x_0}$ ,  $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ ,  $H_n$  — полином Чебышева–Эрмита  $n$ -го порядка:

$$H_n(\chi) = \frac{(1-)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(\chi^2 \frac{d^n(\exp[-\chi^2])}{d\chi^n}\right).$$

Функция  $\psi_n$  имеет  $n$  узлов (точек с  $\psi = 0$ ).

Отличием квантовомеханического решения уравнения колебания гармонического осциллятора от классического является существование энергии нулевых колебаний ( $E_0 = \hbar\omega_0/2$ ), в классической же теории  $E_0 = 0$ .

## Туннельный эффект

Рассмотрим прохождение частицы слева направо сквозь прямоугольный барьер

$$U = \begin{cases} U_0, & x \in (0, l); \\ 0, & x \notin (0, l). \end{cases}$$

Нас интересует случай  $E < U$ . Вне барьера уШ имеет вид:  $\psi^{(o)''} + 2mE\psi^{(o)}/\hbar^2 = 0$ , внутри барьера:  $\psi^{(i)''} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi^{(i)} = 0$ .

Будем искать решение в виде  $\psi = \exp(\lambda x)$ :  $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E = 0$ ,  $\Rightarrow \lambda = \pm i\alpha$ ,  $\alpha = \sqrt{2mE}/\hbar$ . Следовательно, вне барьера волновая функция является суперпозицией падающей и отраженной волн де Бройля:  $\psi_{1,2}^o = A_{1,2} \exp(i\alpha x) + B_{1,2} \exp(-i\alpha x)$ .

Внутри барьера  $\psi^{(i)} = a \exp(\beta x) + b \exp(-\beta x)$ , где  $\beta = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ . Т.к. в области справа от барьера нет отраженной волны,  $B_2 = 0$ . Наложим условие непрерывности и гладкости функции  $\psi$ :  $\frac{d \ln \psi}{dx} = \text{const}$ ,  $\Rightarrow A_1 + B_1 = a + b$ ,  $a \exp(\beta l) + b \exp(-\beta l) = A_2 \exp(i\alpha l)$ ,  $i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta a - \beta b$ ,  $\beta a \exp(\beta l) - \beta b \exp(-\beta l) = i\alpha a \exp(i\alpha l)$ . Пусть  $n = \beta/\alpha = \sqrt{(U_0 - E)/E}$ . Тогда получим следующие выражения для коэффициентов отражения и преломления:

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}, \quad D = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}, \quad R + D = 1.$$

Найдем значение  $D$ , используя ГУ:  $D \approx \frac{16n^2}{(n^2 + 1)^2} \exp(-2\beta l)$ . Обычно опускают множитель  $16n^2/(n^2 + 1)^2$ , имеющий при малых  $n$  порядок единицы. Тогда для  $D$  справедлива формула:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right).$$

Т.о., существует ненулевая вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер. Это явление называют **туннельным эффектом**.

Для барьеров сложной формы

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U_0 - E)} dx\right).$$

### Квазистационарные состояния. Предельный переход к классической физике

В случае слабой зависимости волновой функции  $\psi$  от времени, плотность вероятности  $|\psi|^2$  также слабо будет изменяться с течением времени. В этом случае можно считать, что в некотором интересующем интервале времени  $|\psi|^2 = \text{const}$ . Такие состояния называют **квазистационарными**.

Согласно принципу соответствия, при больших квантовых числах все формулы квантовой механики преобразуются в соответствующие выражения классической физики. Действительно, в этом случае квантование энергии происходит квазинепрерывно (т.е. можно считать энергетический спектр

сплошным), вероятность проникновения частицы сквозь потенциальный барьер становится равной нулю.

### Электрон в периодическом потенциале. Энергетические зоны

Рассмотрим частный случай, когда волновая функция электрона в атоме сферически симметрична ( $s$ -орбиталь). Этот случай не предусматривался классической теорией Бора, где электрон двигался по плоским орбитам. Однако, в квантовой механике нет никаких препятствий для реализации такого случая (в квантовой механике вообще нельзя говорить о движении электрона вокруг ядра, можно лишь утверждать, что электрон находится около ядра со сферически симметричной плотностью вероятности  $|\psi|^2$ ).

Пусть  $Ze$  – заряд ядра. Запишем уШ в полярных координатах:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left( \frac{q}{r} - \beta^2 \right) \psi = 0,$$

где  $\beta^2 = -2mE/\hbar^2$ ,  $q = 2mZe^2/\hbar^2$ . Будем искать решение в виде  $\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \exp(-\beta r)$ . Получим характеристическое уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} - 2\beta \frac{du}{dr} + \frac{q}{r}u = 0.$$

Решение характеристического уравнения будем искать в виде ряда  $u = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k r^k$ , где  $\gamma$  – пока еще не определенная постоянная.

Приравнивая члены с одинаковыми степенями, получим:

$$\gamma(\gamma - 1) = 0, \quad k(k + 1)a_{k+1} - 2\beta k a_k + q a_k = 0, \quad \text{при } k \neq \gamma.$$

Из первого условия получаем, что  $\gamma = 1$ , иначе  $\psi$  – функция при  $r = 0$  обращалась бы в бесконечность. Из второго условия получим:  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+1} = \frac{2\beta}{k+1}$ , т.е. на бесконечности решение ведет себя как экспоненциальная функция, обращаясь в бесконечность. Следовательно, решение должно иметь вид конечного ряда. Пусть при  $k = n$ ,  $2\beta n - q = 0$ , тогда и все последующие члены ряда будут равны нулю. Следовательно,  $n$ -й энергетический уровень

определим из условия  $2\beta n - q = 0$ . Тогда решение будет иметь вид

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2},$$

что совпадает с соответствующей формулой теории Бора.

Соответствующие волновая функция и плотность вероятности примут вид:

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_1}\right), \quad \rho_r = 4\pi r^2 |\psi|^2 = \frac{4}{a_1^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_1}\right),$$

где  $a_1 = \hbar^2/mZe^2$ .

## Основы квантовомеханической теории возмущений

**Теория возмущений** — общий метод нахождения поправок к идеальной системе для нахождения решений для реальной системы. В данном случае гамильтониан системы представляется в виде  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , где  $H_0$  — гамильтониан идеальной системы, допускающий точное решение,  $\hat{V}$  — малое слагаемое, **оператор возмущения**.

Пусть  $\hat{V} = \lambda \hat{W}$ , где  $\lambda$  — малый безразмерный параметр. Тогда уШ примет вид  $(\hat{H}_0 + \lambda \hat{W})\psi = E\psi$ . Представляя волновую функцию как линейную комбинацию собственных векторов базиса  $\hat{H}_0$ , получим:  $\psi = \sum a_n \varphi_n$ ,  $(E - E_m^0)a_m = \lambda \sum W_{mn} a_n$ , где  $W_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{W} \varphi_n dV$ ,  $\hat{H}_0 \varphi_n = E_n^0 \varphi_n$ .

Разложим  $E_m$  по  $\lambda$ :  $E_m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n E_m^{(n)}$ ,  $a_k = \delta_{km} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a_m^{(n)}$ . В первом приближении  $E = E_m^0 + \lambda E_m^1 = E_m^0 + \lambda W_{mm} = E_m^0 + V_{mm}$ , где  $V_{mm} = \int \varphi_m^* \hat{V} \varphi_m dV$ . Т.о., в первом приближении поправка к энергии равна среднему значению оператора возмущения.  $a_m^1 (E_k^0 - E_m^0) = W_{mk}$ ,  $\Rightarrow a_m^1 = \frac{W_{mk}}{E_k^0 - E_m^0}$ ,

$$\psi_k = \varphi_k + \lambda a_k^1 \varphi_k + \sum_{m \neq k} \frac{V_{mk}}{E_k^0 - E_m^0} \varphi_m = \varphi_k + \sum_{m \neq k} \frac{V_{mk}}{E_k^0 - E_m^0},$$

т.к.  $a_k^1 = 0$  (чисто мнимый коэффициент).

Метод теории возмущений определен только в случае, если ряд последовательных приближений сходится, т.е. каждая последующая поправка меньше предыдущей, и  $|V_{km}| \ll |E_k^0 - E_m^0|$ .

## Тождественность микрочастиц. Бозоны и фермионы. Принцип Паули

**Квантовая статистика** (к.с.) — статистический метод исследования систем большого количества частиц, подчиняющихся квантовым законам.

К.с. строится на принципе **неразличимости** тождественных частиц, т.е. все одинаковые частицы считаются принципиально неразличимыми друг от друга.

Основная задача к.с — о распределении частиц по координатам и скоростям. Обозначим элемент ФП  $d\Gamma = dp_x dp_y dp_z dx dy dz$  — **фазовый объем**. Согласно квантовой механике, число возможных квантовых состояний системы  $dN = d\Gamma/h^3$ .

**Бозоны** — частицы с целым спином, подчиняющиеся статистике Бозе–Эйнштейна:

$$f_B = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) - 1},$$

где  $\mu$  — **химический потенциал**,  $\mu = \frac{U - TS + pV}{N}$ .

**Фермионы** — частицы с полуцелым спином, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

**Вырождение газов** — отступление в поведении бозонных и фермионных газов от классического распределения Максвелла–Больцмана. Вырождение становится существенным при  $T \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$ . Вырождение характеризуется **параметром вырождения**:  $A = \exp(\mu/kT)$ . При  $A \ll 1$  распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна не отличаются от распределения Максвелла–Больцмана:

$$f = A \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right).$$

**Температурой вырождения**,  $T_{\text{выр}}$  называется температура, при которой вырождение становится существенным. У газов  $T_{\text{выр}}$  мала, т.е. при нор-

мальных условиях они подчиняются статистике Максвелла–Больцмана. Фотонный газ всегда вырожден, т.к. у него  $T_{\text{выр}} = \infty$ . Фотонный газ подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна. В вырожденном состоянии находятся и электроны внутри металлов, т.к. для них  $T_{\text{выр}}$  значительно превышает нормальную температуру.

**Принцип запрета Паули:** *в одном и том же квантовом состоянии не может существовать более одного фермиона.* Следовательно, в вырожденном состоянии фермионы занимают все энергетические уровни, вплоть до некоторого  $E_F$ .

Бозоны же не подчиняются принципу Паули: в сильно вырожденном состоянии они образуют т.н. **бозе–конденсат** — совокупность бозонов с одинаковыми энергиями.

## Принцип неопределенности

**Соотношения неопределенностей** (С.н.) — фундаментальные соотношения квантовой физики, устанавливающие предел точности одновременного определения канонически-сопряженных динамических переменных, характеризующих квантовую систему: координата — импульс, действие — угол и т.п. Математически С.н. имеют вид неравенств, например,  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ .

С.н. были установлены Гайзенбергом в ходе мысленного эксперимента, поэтому зачастую их называют «соотношения Гайзенберга». Робертсон показал, что С.н. являются следствием **коммутиционных соотношений**  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$  между операторами соответствующих физических величин, причем  $\Delta A$  и  $\Delta B$  являются среднеквадратичными отклонениями.

Шрёдингер предложил более общую форму С.н.:

$$\Delta x^2 \Delta p_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(1 - r^2)},$$

где  $r$  — коэффициент корреляции операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . Для сильно коррелированных состояний «эффективная постоянная Планка»,  $\hbar/\sqrt{1 - r^2}$  может существенно превышать  $\hbar$ .

С.н. имеют место для любых физических величин  $f$  и  $g$ , которым соответствуют некоммутирующие эрмитовы операторы. Если коммутатор  $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\hat{c}$ , то С.н. имеют вид

$$\Delta f^2 \Delta g^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} |\bar{c}|^2.$$

Среди физических толкований Н.с. можно выделить по крайней мере три уровня. Наиболее часто Н.с. трактуют как *ограничение на экспериментально достижимую точность измерения характеристик квантовых объектов, обусловленное неадекватностью классических приборов целям квантовых измерений*. Другое толкование исходит из того, что С.н. есть следствие внутренних свойств квантовых объектов (корпускулярно–волновой дуализм): *для полного описания квантовой системы равно необходимо учесть как ее корпускулярные, так и волновые свойства*.

Второе толкование значительно шире и представляет собой общий *принцип неопределенности*. Этот принцип является предпосылкой **принципа дополнительности** Бора: *получение экспериментальной информации об одних физических величинах, описывающих микробъект, неизбежно связано с потерей информации о некоторых других величинах, канонически сопряженных с первыми*. С.н. с этой точки зрения можно трактовать как способ сохранения классических понятий для описания квантовых систем путем взаимного ограничения области их совместного применения.

Третья трактовка С.н. связана с соотношением  $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ . Можно утверждать, что *за ограниченный интервал времени невозможно точно определить энергию системы, или же: неопределенность энергии состояния возбужденной квантовой системы тесно связана с ее временем жизни*.

Из С.н. можно оценить, например, «скорость вращения» электрона вокруг ядра атома водорода в основном состоянии:

$$v \geq \Delta p / m \sim \hbar / m r_0 \sim e^2 / \hbar, \quad \Rightarrow \quad v / c \approx e^2 / \hbar c \approx \alpha \approx 1 / 137.$$

## 59 Одноэлектронный атом

### Уравнение Шрёдингера с центрально симметричным потенциалом

Рассмотрим движение электрона в кулоновском поле ядра. Наиболее подходящей в данном случае является сферическая СК. Основные операторы примут вид:

$$\hat{U} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta; \quad \psi(r, \theta, \varphi, t) = \psi(r, \theta, \varphi) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right).$$

Решим стационарное уШ  $\hat{H}\psi = E\psi$ , где  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$ . В сферической СК лапласиан примет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi},$$

т.к.  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ .

Пусть  $k^2 = 2m \frac{E - U}{\hbar^2}$ , тогда получим:

$$\left( \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right) \psi + k^2 \psi = 0.$$

$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ,  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{r^2 \Delta_r R}{R} + r^2 k^2}_{=\lambda} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi} Y}{Y}.$$

Для угловых переменных получим:  $\Delta_{\theta,\varphi} Y + \lambda Y = 0$ . Пусть  $Y = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , тогда получим еще два уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0; \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0.$$

Из условия нормировки  $\int \psi^* \psi dV = 1$ , получим:

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int_0^\pi |\Theta|^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi = 1.$$

$\Phi = \mathfrak{C} \exp(im\varphi)$ ,  $\Theta$  находится посредством полиномов Лежандра,  $\Rightarrow$

$$Y(\theta, \varphi) = \left( \frac{(2l+1)(l-m)}{4\pi(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos\theta) \exp(im\varphi).$$

Следует указать, что решения данного уШ существуют лишь при  $\lambda = l(l+1)$ . Число  $m$  называют **магнитным квантовым числом**, а число  $l$  — **орбитальным квантовым числом**.

### Операторы квадрата импульса и проекции импульса

Оператор квадрата импульса  $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$ , а т.к.  $-\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi} Y = \hbar^2 \lambda Y$ , то  $\hat{L}^2 Y = \hbar^2 \lambda Y$ . Следовательно, собственные значения оператора  $\hat{L}^2$ :  $L^2 = \hbar^2 \lambda = \hbar^2 l(l+1)$ .  $\Rightarrow \boxed{L = \hbar \sqrt{l(l+1)}}$ .

Оператор  $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .  $\hat{L}_z^2 \Phi = m^2 \hbar^2 \Phi$ ,  $\Rightarrow \boxed{L_z = m\hbar}$ .

Решим теперь радиальное уравнение, зная, что  $\lambda = l(l+1)$ :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R = 0.$$

Найдем решение уравнения:

1.  $r \rightarrow \infty$ :  $R'' + \frac{2m}{\hbar^2} RE = 0$ ,  $\Rightarrow R = A \exp(-\epsilon r) + B \exp(\epsilon r)$ , где  $\epsilon^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ .

Для сходимости решения положим  $B = 0$ . Тогда  $\boxed{R = A \exp(-\epsilon r)}$ .

2.  $l = 0$ . Пусть  $R = A \exp(-\epsilon r)$ , тогда  $\epsilon^2 = \frac{m^2 Z^2 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^4}$ ,  $\Rightarrow E = -\frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$ .

3. Теперь будем искать решение полного уравнения в виде  $R = f(r) \exp(-\epsilon r)$ :

$$\epsilon^2 = \frac{m^2 Z^2 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^4 (l + n_r + 1)^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2},$$

$$\boxed{E = -\frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 (l + n_r + 1)^2}},$$

где  $n = l + n_r + 1$  — **главное квантовое число**.

## Волновые функции стационарного состояния атома водорода

Для основного состояния атома водорода радиальная составляющая волновой функции  $R = Af(r) \exp(-\frac{r}{na})$ , где  $a$  – боровский радиус. Нормируя, получим функцию основного состояния:  $\psi_{1s} = \pi^{-1/2} a^{-3/2} \exp(-r/a)$ . Максимальная вероятность нахождения электрона на  $r = a$ . Энергия  $1s$  состояния

$$E_{1s} = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}.$$

## Вырождение уровней по орбитальному моменту

Если представить электрон движущимся по круговой орбите, он будет обладать магнитным,  $\mu = IS = e\nu\pi r^2 = evr/2$ , и механическим,  $L = mvr$ , моментами.

**Гиромангнитным отношением** называют величину  $\Gamma = \mu/L = -e/(2m)$ .

Экспериментально для свободного электрона получено:  $\Gamma_s = -e/m$ ,  $\mu = e\hbar/(2m)$ ,  $L_s = \hbar/2$ . Величина  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  называется **магнетоном Бора**.

**Штерн и Герлах** определили экспериментально магнитные моменты атомов. Пучек атомов пропускаться через неоднородное МП. На атомы действует сила, зависящая от взаимной ориентации магнитного момента и МП. Ожидалось, что  $\mu$  может иметь любую ориентацию относительно  $H$ , однако, оказалось, что угол между этими величинами может иметь только дискретные значения, т.е. *проекция  $\mu$  на  $H$  квантуется*.

Для магнитных моментов атомов получились значения порядка нескольких  $\mu_B$ , причем у атомов некоторых веществ магнитный момент отсутствовал.

Т.к. механический и магнитный моменты атома связаны, то можно сделать вывод, что в опытах по определению механического момента свободного электрона  $L_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{3}\hbar/2$  на самом деле измерялся магнитный момент  $L_{sz} = m_s\hbar = \hbar/2$ , где  $m_s$  – **магнитное спиновое число**,  $m_s = \pm 1/2$ .

Гипотезу о существовании собственного момента импульса — **спина** — электрона выдвинули Уленбек и Гаудсмит.

## Спин–орбитальное взаимодействие

Для электрона  $\mu_s/L_s = -e/m_e$ ,  $L_s = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3}$ ,  $\Rightarrow \mu_s = -2\mu_B\sqrt{3}$ ,  $\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e}L_{sz} = \pm\mu_B$ .

Если электрон находится в состоянии  $l \neq 0$ , его спиновый и орбитальный моменты,  $L_s$  и  $L_l$ , взаимодействуют между собой, образуя **полный момент**:  $L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$ , где  $j = l + s, |l - s|$ . При  $l \neq 0$   $j = l \pm 1/2$ , в  $s$ -состоянии  $j = s = 1/2$ .

**Спин–орбитальное взаимодействие** — взаимодействие спинового и орбитального магнитных моментов, благодаря которому образуются состояния с новыми значениями энергии. Т.о., все уровни с  $l \neq 0$  у водорода и щелочных металлов расщепляются на дублеты. Амплитуда расщепления  $i$ -го энергетического уровня  $\Delta E_i = \alpha^2 E_i / 16$ , где  $\alpha \approx 137$  — **постоянная тонкой структуры**.

## 60 Многоэлектронные атомы

**Общие принципы описания многоэлектронного атома.**

**Атомные оболочки и подоболочки**

Эксперименты показывают, что по мере роста номера химического элемента происходит последовательное заполнение электронных состояний атома. Согласно **принципу Паули**, в одном и том же состоянии не может быть более одного фермиона.

Согласно принципу тождественности частиц, волновая функция является симметричной для бозонов и антисимметричной для фермионов.

Принцип Паули объясняет периодичность свойств химических элементов.

**Электронная оболочка** — совокупность электронных состояний в атоме с

одним значением главного квантового числа  $n$  (в порядке возрастания:  $K, L, M, N, \dots$ ). **Подоболочка** — подгруппа входящих в оболочку электронов с одинаковыми значениями орбитального квантового числа  $l$  (в порядке возрастания:  $s, p, d, f$ ). Полное число электронов в подоболочке  $N_l = 2(2l + 1)$ , а в оболочке —  $N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2$ .

Эффективная энергия электрона в приближении центрально симметричного поля складывается из энергии кулоновского поля, экранированного электронами внутренних оболочек, и центробежной энергии.

Оценка показывает, что при возрастании  $l$  увеличивается вероятность нахождения электронов ближе к ядру атома.

Необходимо учесть, что поле экранированного ядра оказывается короткодействующим. С другой стороны, эффективная энергия растет с ростом  $l$  за счет центробежной энергии. Также необходимо учитывать полное отсутствие центробежной энергии в  $s$ -состояниях. Из экспериментов установлено, что энергия состояния  $4s$  меньше энергии  $3d$ ,  $\Rightarrow$  после  $3p$ -орбитали заполняется  $4s$ , а лишь затем  $3d$ .

## Модель Томаса–Ферми и самосогласованное поле

**Модель самосогласованного поля Хартри** позволяет свести многоэлектронную задачу к одноэлектронной. Пусть оператор взаимодействия двух электронов  $\hat{V}_{kl}$ , тогда энергия  $l$ -го электрона

$$V_l(\vec{r}_l) = \sum_{k \neq l} \int \psi_k^* \hat{V}_{kl} \psi_l d\tau_k.$$

УШ в первом приближении поля Хартри:  $(\hat{H}_l + \hat{V}_l - E_l)\psi_l^1 = 0$ .

Состояние атома рассматривается как совокупность одноэлектронных состояний, при этом учитывается лишь основная часть взаимодействия электронов (т.е. не учитывается спин–орбитальное взаимодействие).

Фок предложил ввести волновую функцию

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_z) = \frac{1}{\sqrt{z!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \dots & \psi_1(\xi_z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_z(\xi_1) & \dots & \psi_z(\xi_z) \end{vmatrix}.$$

Однако, метод Хартри–Фока очень сложен, и его сложность резко возрастает с ростом количества электронов.

Упрощением является **метод Томаса–Ферми**. Он не позволяет объяснить индивидуальные свойства каждого атома, но позволяет исследовать их общие свойства. Суть метода в следующем. В многоэлектронных атомах большая часть электронов находится в состояниях с большими  $n$ , дебройлевская длина волны электрона значительно меньше размеров атома. В этих условиях возможно приближение квазиклассического приближения, позволяющее говорить об импульсе электрона как функции его координат. Граничные условия:  $\psi(R) = A$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} r(\psi(r) - A) = Ze$ .

Существенный недостаток метода Томаса–Ферми — в медленном спаде плотности электронов на больших расстояниях от ядра, из-за чего был введен ряд поправок.

Для ионов решение зависит от величины  $(Z - N_{\text{электронов}})/Z \neq 0$ . Для положительных ионов получаются конечные значения радиуса атома даже без введения поправок.

## Электронная конфигурация. Приближение $LS$ - и $JJ$ -связей

**Электронная конфигурация** — условная запись распределения электронов по энергетическим состояниям, например, для натрия:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s$ , что означает, что на первом энергетическом уровне (первая оболочка) присутствуют 2 электрона в  $s$ -состоянии, на втором — 2 в  $s$ -состоянии и 6 в  $p$ -состоянии, на третьем — один электрон в  $s$ -состоянии.

Так как внутренние атомные оболочки полностью заполнены, их полный

спиновый момент равен нулю. Следовательно, спин атома определяется суммарным спином валентных электронов.

Все электроны обладают спиновым и орбитальным моментами. Наиболее сильным является взаимодействие электронов с атомным ядром, менее сильными — межэлектронные взаимодействия. **Межэлектронные взаимодействия** делятся на два вида:

1. **Рёссел–Саундерсова связь ( $LS$ )**. Орбитальные моменты электронов взаимодействуют сильнее между собой, чем со спиновыми моментами. В то же время спиновые моменты связаны между собой сильнее, чем с орбитальными. В итоге суммарный спиновый момент  $L_S = \sum L_s$  и суммарный орбитальный момент  $L_L = \sum L_l$ . Полный момент  $L_J = L_S + L_L$ . Энергия связи в данном случае зависит от взаимной ориентации частных и суммарных спинов.
2. **JJ–связь**. Если орбитальный и спиновый моменты взаимодействуют сильнее друг с другом, чем с подобными себе, то результирующий спин  $L_J = \sum L_j$ , где  $L_j = L_s + L_l$ . Данный вид связи чаще всего наблюдается у тяжелых атомов.

## Терм. Тонкая структура терма. Спин и магнитный момент нуклонов и ядра

Условно **терм** (энергетическое состояние электрона) обозначается так:  $^{2S+1}L_J$ , где  $L = \overline{S, P, D, F}$ , в зависимости от типа электронной орбиты. Буквы  $s, p, d, f$  соответствуют английским наименованиям спектральных серий атомов с одним внешним электроном:  $s$  — внешняя,  $p$  — главная,  $d$  — диффузная и  $f$  — фундаментальная.

В случае, когда квантовое число  $S < L$ , **мультиплетность терма** (количество подуровней с разными квантовыми числами  $J$ ) определяется выражением  $2S + 1$ , т.к. в данном случае  $J = \overline{L - S, L + S}$ . Если же  $L < S$ , мультиплетность определяется числом  $2L + 1$ .

**Магнитный момент** атома также разделяется на спиновый,  $\mu_S =$

$-2\mu_B\sqrt{S(S+1)}$ , и орбитальный,  $\mu_L = -\mu_B\sqrt{L(L+1)}$ . Проекция орбитального момента  $\mu_{Lz} = -\mu_B m_L$ . Полный магнитный момент  $\mu_J = -\mu_B g\sqrt{J(J+1)}$ , где  $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L-1)}{2J(J+1)}$  — **фактор Ланде**. Так, при  $S = 0$ ,  $\mu_J = \mu_L$ , а при  $L = 0$ ,  $\mu_J = \mu_S$ ;  $\mu_{Jz} = -\mu_B g m_J$ .

За счет существования магнитного момента атома обнаруживается **тонкая структура термов**: во внешнем МП энергетические уровни атома расщепляются на несколько компонент (**эффект Зеемана**).

Эффект Зеемана объясняется тем, что во внешнем МП атом получает дополнительную энергию  $\Delta E = -\vec{\mu}_J \vec{B}$ .

Правила отбора ( $\Delta m_J = 0, \pm 1$  и пр.) накладывают ограничения на электронные переходы.  $\Delta\omega_0 = \mu_B B/\hbar = eB/2m_e$  — **лоренцево смещение**.

Нуклоны атомных ядер являются фермионами, т.к. имеют полуцелый спин. Спин ядра  $L = \sqrt{I(I+1)}$ , где  $I$  — **полное квантовое число** атома. Магнитный ядерный момент  $\mu_N = e\hbar/2m_p$ , где  $m_p$  — масса протона. Полный магнитный момент  $\mu = g_K L$ , где  $g_K$  — **гиромагнитное отношение**.

За счет взаимодействия орбитального и спинового моментов ядра и электронной оболочки возникает **сверхтонкая структура** спектра.

## Изотопические эффекты. Атомы щелочных металлов.

### Атом гелия

Вследствие различия значений постоянной Ридберга,  $R$ , для разных масс атомного ядра, в спектрах проявляется **изотопический эффект**, связанный с существованием **изотопов** (ядер с одинаковым зарядовым числом,  $Z$ , и разными массовыми числами,  $A$ , одного и того же химического элемента).

Для смеси изотопов этот эффект состоит в наличии дополнительных спектральных линий к линиям атомов, ядра которых принадлежат изотопу с наибольшей распространенностью. Интенсивности этих линий относятся, как процентные содержания изотопов в веществе, а длины волн смещены друг относительно друга для изотопов с массами  $M'$  и  $M''$  на величину  $\Delta\lambda/\lambda = m_e(M'' - M')/\frac{1}{2}(M' + M'')$ . С другой стороны,  $\Delta\lambda/\lambda = (R_1 - R_2)/R_1$ , где  $R_1$

и  $R_2$  – постоянные Ридберга для обоих изотопов.

**Щелочные металлы.** Спектры испускания атомов щелочных металлов состоят их нескольких серий линий. Наиболее интенсивные из них: главная (абсорбционная линия, соответствующая переходу атома в основное состояние), резкая (состоит из резких линий), диффузная (состоит из размытых линий) и основная (сходна с сериями водорода).

Особенностью спектров щелочных металлов является то, что аналогичные уровни в различных рядах лежат на неодинаковой высоте. Спектры щелочных металлов испускаются при переходах валентного электрона с одного уровня на другой. Энергия состояния кроме квантового числа,  $n$ , зависит также от номера ряда термов. Различные ряды термов щелочных металлов отличаются значениями момента импульса валентного электрона. Энергия валентного электрона в атоме щелочного металла зависит от величины момента импульса электрона.

В более сложных, чем водород, атомах можно считать, что каждый из электронов движется в усредненном поле ядра и остальных электронов. Это поле уже не будет кулоновским (т.е. пропорциональным  $1/r^2$ ), но имеет центральную симметрию. В самом деле, в зависимости от степени проникновения электрона в глубь атома, заряд ядра будет для данного электрона в большей или меньшей степени экранироваться другими электронами, так что эффективный заряд, воздействующий на рассматриваемый электрон, не будет постоянным. Вместе с тем, усредненное по времени поле, создаваемое электронами, можно считать центрально-симметричным.

Решение уШ для электрона, движущегося в центрально-симметричном некулоновском поле, дает результат, аналогичный результату для водородного атома, с тем отличием, что энергетические уровни зависят не только от  $n$ , но и от  $l$ . Т.о. в этом случае снимается вырождение по  $l$ . Отличие в энергии между состояниями с различными  $l$  и одинаковыми  $n$  вообще не так велико, как между состояниями с различными  $n$ . С увеличением  $l$  энергия уровней с одинаковыми  $n$  возрастает.

Частота спектральной линии пропорциональна разности термов конечного и начального состояний. Следовательно, спектральные линии серии натрия могут быть представлены в следующем виде:

- резкая серия:  $3P \rightarrow nS$  ( $n > 4$ );
- главная серия:  $3S \rightarrow nP$  ( $n > 3$ );
- диффузная серия:  $3P \rightarrow nD$  ( $n > 3$ );
- основная серия:  $3D \rightarrow nF$  ( $n > 4$ ).

Ридберг установил, что термы щелочных металлов с большой степенью точности можно представить с помощью эмпирической формулы  $T(n) = \frac{R}{(n - \alpha)^2}$ , где  $\alpha$  – дробное число – ридберговская поправка (**квантовый дефект**). Эта поправка имеет постоянное значение для данного ряда термов. Ее принято обозначать той же буквой, какой обозначен соответствующий ряд термов. Для  $F$ -термов эта поправка равна нулю, поэтому основная серия оказывается водородоподобной.

**Атом гелия.** Уровни энергии и собственные функции в нулевом приближении (при пренебрежении взаимодействием электронов):  $E = E_{n1} + E_{n2}$ ,  $\Psi = \psi_{n1} + \psi_{n2}$ , где  $E_n = -\pi m_e e^4 Z^2 / (n^2 \hbar)$  и  $\psi_n$  – водородоподобная волновая функция электрона. В первом приближении теории возмущений нормальное состояние атома гелия вычисляется с учетом энергии взаимного отталкивания электронов, описываемых волновыми функциями нормального состояния водородоподобного типа. Полная энергия основного состояния двухэлектронной системы в нулевом приближении:  $E_0 = 2Z^2 E_H$ , в первом приближении  $E_1 = (2Z^2 - \frac{5}{4}Z) E_H$ , где  $E_H$  – энергия атома водорода в нормальном состоянии.

Вследствие того, что оба электрона атома гелия неотличимы друг от друга, возникает вырождение уровней энергии, связанное с неразличимостью атомных электронов (обменное вырождение). Общее решение уШ для атома гелия может быть представлено в виде линейной комбинации его частных решений. При учете возмущения, обменное вырождение снимается и двукратно

вырожденное состояние расщепляется на два. Средняя энергия возмущения,  $\Delta E = \int |\Psi^2| \frac{e}{r^2} dV_1 dV_2$ , при нормировке волновой функции выражается через симметричную и антисимметричную функции.

Существование спина как новой фазовой координаты, приводит к усложнению волновой функции. Обычно из  $\Psi$  выделяют отдельно спиновую волновую функцию  $S_\alpha(p_s)$ :

$$\Psi = \psi(\vec{r}, t) S_\alpha(p_s), \quad \text{где } \alpha = \pm 1/2, \quad S_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha p_s > 0; \\ 0, & \alpha p_s < 0. \end{cases}$$

Спиновая функция обладает определенными свойствами симметрии, для двухэлектронной системы возможны четыре спиновые функции. В соответствии с принципом Паули, полные волновые функции, отвечающие состояниям двухэлектронной системы, должны быть антисимметричными.

## Периодическая система элементов. Правила Хунда

Принцип Паули дает объяснение периодической структуре химических элементов. Например, у водорода:  $L = 0, S = 1/2, J = 1/2 \Rightarrow$  основным термом является  ${}^2S_{1/2}$ . У гелия:  $L = 0, S = 0, J = 0$ , основной терм —  ${}^1S_0$ , литий:  $L = 0, S = 1/2, J = 1/2, {}^2S_{1/2}$  и т.д.

Видно, что при увеличении  $n$  периодически происходит повторение термов, у  $s$ -элементов: термы  ${}^2S_{1/2}$  и  ${}^1S_0$ , у  $p$ -элементов:  ${}^2P_{1/2}, {}^3P_0, {}^4P_{3/2}, {}^3P_2, {}^2P_{3/2}, {}^1S_0$  и т.д.

Согласно принципу Паули, разрешены лишь такие термы, для данной конфигурации, у которых значения хотя бы одного из магнитных квантовых чисел  $m_s$  и  $m_l$  электронов с равными  $n$  и  $l$  не совпадают.

### Правила Хунда

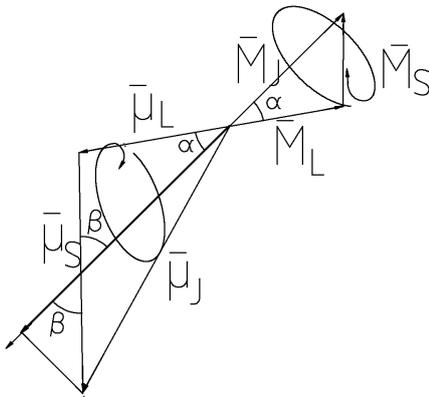
1. Из термов, принадлежащих данной конфигурации, минимальной энергией обладает терм с максимально возможными  $S$  и  $L$ .
2. Мультиплеты, образованные эквивалентными электронами, являются *правильными* (с ростом  $J$  растет энергия), если заполнено не более половины оболочки, и *обращенными* в противоположном случае.

По правилам Хунда и определяются основные термы для данной конфигурации.

## 61 Атом во внешнем поле

### Атом в магнитном поле. Слабое и сильное поля. Фактор Ланде

В векторной модели атома механические и электромагнитные моменты изображаются в виде векторов. Пусть  $M$  и  $M_z$  (некоторый момент атома и его проекция) имеют фиксированные значения, тогда  $\vec{M}$  может быть направлен по одной из образующих конуса вокруг оси  $OZ$ . Можно предположить, что  $\vec{M}$  прецессирует вокруг оси  $OZ$ .



Допустим, что вдоль  $OZ$  создано МП  $\vec{B}$ . С  $M$  связан соответствующий магнитный момент  $\vec{\mu}$ , т.о.,  $\vec{B}$  посредством  $\vec{\mu}$  воздействует на  $\vec{M}$ . Чем большей будет величина  $B$ , тем большей будет скорость прецессии  $M$ .

Если  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ , то векторы  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  будут прецессировать вокруг  $\vec{M}$ , который, в свою очередь, прецессирует вокруг оси  $OZ$ .

В зависимости от соотношения между взаимодействиями магнитных моментов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  друг с другом и с  $B$  могут наблюдаться различные явления:

**Слабое поле.**  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ . Наблюдается два вида прецессии:  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  вокруг  $\vec{M}$  и  $\vec{M}$  вокруг  $OZ$ . Скорость первого вида прецессии будет значительно превосходить скорость второго вида, т.к. взаимодействие магнитных моментов между собой значительно превышает взаимодействие их с МП.

**Сильное поле.** В данном случае произойдет разрыв связи  $\vec{M}_1$  с  $\vec{M}_2$ . Оба момента будут прецессировать независимо друг от друга вокруг направления внешнего МП.

Подобным образом взаимодействуют между собой спиновый ( $M_S$ ) и орбитальный ( $M_L$ ) моменты атома во внешнем МП. Найдём полный магнитный момент  $\mu_J$ .

Так как магнетизм спинового момента удвоен, векторы  $\vec{\mu}_J$  и  $\vec{M}_J$  не будут коллинеарны,

$$\langle \mu_J \rangle = -|\mu_L| \cos \alpha - |\mu_S| \cos \beta.$$

$$|\mu_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}, |\mu_S| = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)}; \vec{M}_S = \vec{M}_J - \vec{M}_L, \Rightarrow M_S^2 = M_J^2 + M_L^2 - 2M_J M_L \cos \alpha, \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{M_J^2 + M_L^2 - M_S^2}{2M_J M_L} = \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{L(L+1)}}.$$

Аналогично, т.к.  $\vec{M}_L = \vec{M}_J - \vec{M}_S$ , получим:

$$\cos \beta = \frac{M_J^2 + M_S^2 - M_L^2}{2M_J M_S} = \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{S(S+1)}}.$$

Таким образом,

$$\mu_J = -\mu_B \sqrt{J(J+1)} \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)},$$

где  $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$  — **фактор Ланде**.

## Эффекты Зеемана и Пашена–Бака

**Эффект Зеемана** — расщепление спектральных линий в МП. В МП атом приобретает дополнительную энергию  $\Delta E = -\vec{\mu}_B \vec{B}$ ,  $\vec{\mu}_J \vec{B} = -\mu_B g m_J$ ,  $\Rightarrow \Delta E = \mu_B g B m_J$ .

Для синглетных линий  $\Delta E = \mu_B B m_J$  (у них  $S = 0$ ). Тогда при  $L = 0$  расщепления не происходит; при  $L = 1$  образуется триплет ( $\omega_0, \omega_0 \pm \Delta\omega$ ); при  $L = 2$  возможно пять подуровней, но, согласно **правилам отбора**,  $\Delta m_J =$

$0, \pm 1$ ,  $\Rightarrow$  при переходах с уровней  $L = 2$  на  $L = 1$  возникает три линии (триплет).

Полученное смещение линий называют **нормальным (Лоренцевым)**:

$$\Delta\omega_0 = \frac{e}{2m_e} B$$

**Простой эффект Зеемана** наблюдается для линий, не имеющих тонкой структуры (синглетов).

У линий, обладающих тонкой структурой, число компонент превышает три, и смещение подчиняется закону  $\Delta\omega = \Delta\omega_0 r/q$ , где  $\Delta\omega_0$  – расщепление для простого эффекта,  $p$  и  $q$  – небольшие целые числа. В данном случае эффект Зеемана называют **аномальным**.

**Эффект Пашена–Бака** наблюдается в сильном МП:

$$\Delta E = \mu_B(m_L + 2m_S)B = \hbar\Delta\omega_0(m_L + 2m_S).$$

В данном случае правило отбора имеет вид:  $\Delta m_S = 0, \Delta m_L = 0, \pm 1$ .

## Электронный парамагнитный резонанс

Предположим, что на атом в постоянном МП падает ЭМВ с частотой  $\omega$ . Тогда  $\hbar\omega = \delta E = \mu_B g B = \hbar\Delta\omega_0 g$ , где  $\delta E$  – расстояние между атомными подуровнями.

Под действием МП падающей волны происходят переходы атома между соседними подуровнями — **электронный парамагнитный резонанс (ЭПР)**.

Т.к. ЭПР зависит от магнитных свойств атома, он возможен только для парамагнетиков. Длина резонансной волны составляет порядка нескольких сантиметров. В состоянии равновесия ЭПР происходит с ослаблением внешнего ЭМП.

ЭПР используется для исследования структуры кристаллов, магнитных свойств атомных ядер.

## Атом в электрическом поле. Эффект Штарка

При помещении атома в однородное ЭП с напряженностью  $E$  в нем возникает дипольный момент  $erE$ , энергия уменьшается на величину  $\Delta E = -eZE$ , где  $Z$  – заряд ядра атома. Возникает расщепление спектральных линий — **эффект Штарка**

Если величина  $E$  небольшая, можно воспользоваться методом возмущений. Тогда для атома водорода в первом приближении расщепление линий будет пропорционально  $E$  (*линейный эффект Штарка*).

Если поле атома отличается от чисто кулоновского (т.е. для всех атомов, кроме водорода), нельзя останавливаться на первом приближении: эффект будет *квадратичным*, т.е.  $\Delta E \propto E^2$ .

## Теория рассеяния

Постановка задачи: пучек частиц сорта  $A$ , полученный от ускорителя, падает на мишень из частиц сорта  $B$ .

Зная характеристики  $A$  и  $B$  до эксперимента, необходимо изучить их после. Если какие-то из характеристик изменяются, можно говорить о произошедшем рассеянии частиц  $A$  на мишени.

При столкновении атомов возможны следующие **виды рассеяния**:

1. **упругое**: структура атомов не изменяется, меняются лишь их динамические характеристики;
2. **возбуждение**: часть энергии одного из атомов передается другому;
3. **ионизация**: у одного из сталкивающихся атомов происходит отрыв одного или нескольких электронов.

Любой такой процесс называют **каналом рассеяния**.

Основной характеристикой рассеяния является его **сечение**. Сечения рассеяния, в зависимости от типа процесса рассеяния, делятся на:

- дифференциальное сечение упругого рассеяния (при упругом рассеянии в элемент телесного угла  $d\Omega$ , построенного вдоль некоторого направле-

- ния  $\vec{K}$ );
- полное сечение упругого рассеяния (при упругом рассеянии на любой угол);
  - дифференциальное сечение возбуждения (при рассеянии в элемент телесного угла с возбуждением мишени);
  - сечение ионизации (при ионизации мишени);
  - полное сечение (процесс заключается в том, что рассеяние вообще имело место).

**Два типа задач:** *прямая* — определить характеристики рассеянных частиц по характеристикам начальных частиц и рассеивающего поля; *обратная* — найти характеристики рассеивающего поля по известным характеристикам рассеянных и начальных частиц.

Обычно рассматриваются слабосингулярные поля, т.е.  $\lim_{r \rightarrow \infty} |rV(r)| = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} |r^2V(r)| = 0$ .

**Дифференциальное сечение рассеяния** — отношение числа частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  к плотности потока падающих частиц (т.е. это доля частиц, рассеянных в данный элемент телесного угла).

Если величина рассеивающего поля значительно меньше кинетической энергии налетающей частицы, задачу рассеяния можно свести к теории возмущений. Рассеяние можно рассматривать как квантовый переход непрерывного спектра из начального состояния  $\vec{p}_a = \hbar\vec{k}_a$ ,  $\varphi_a = \exp(i\vec{k}_a\vec{r})$  в конечное  $\vec{p}_b = \hbar\vec{k}_b$ ,  $\varphi_b = \exp(i\vec{k}_b\vec{r})$ .

В классическом случае рассеяние характеризуется формулой Резерфорда:

$$\frac{dN}{N} = na \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}.$$

В случае рассеяния спиновых частиц вводят понятие **парциальных волн** — волн де Бройля, отвечающих определенному значению момента импульса (спина). Волновую функцию частиц можно представить как совокупность парциальных волн.

Каждая парциальная волна представляет собой суперпозицию сходящихся и расходящихся сферических волн. В центрально симметричных полях моменты импульса сохраняются, следовательно, все парциальные волны рассеиваются самостоятельно, независимо от других.

Согласно **оптической теореме**, интегральное сечение рассеяния,  $\sigma$ , связано с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед,  $A$ :  $\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im A(\theta)$ ,  $k^2 = 2m_a E/\hbar^2$ .

Важная характеристика рассеяния — **фазовые сдвиги**, характеризующие волновую функцию рассеянной частицы ( $S_l = \exp(2i\delta_l)$ ). Их знаки и численные значения реагируют на характер поля и его интенсивность. Фазовые сдвиги зависят и от номера парциальной волны,  $l$ , что отражает вклад каждой парциальной волны в сечение рассеяния.

Свойства фазовых сдвигов следующие. Для поля притяжения  $\delta > 0$ , для поля отталкивания  $\delta < 0$ . При предельном переходе к классической механике,  $\hbar l \rightarrow \rho r$ , где  $\rho$  — импульс частицы,  $r$  — *прицельный параметр*.

В случае «медленных» столкновений решающий вклад в амплитуду рассеяния имеет парциальная волна с  $l = 0$ .

**Эффект Рамзауэра** — аномальное (с позиции классической физики) взаимодействие электронов с нейтральными атомами некоторых газов, заключающееся в резком уменьшении сечения упругого рассеяния электронов при небольших ( $\leq 1$  эВ) энергиях столкновения. Объясняется этот эффект тем, что при некоторых значениях глубины и размеров потенциальной ямы, создаваемой атомами мишени, она не приводит к рассеянию тех парциальных волн энергия которых такова, что  $\operatorname{tg} Kd = Kd$ , где  $K = k^2 + K_0^2$ ,  $K_0^2 = \frac{2m_b V_0}{\hbar^2}$ , где  $V_0$  — глубина потенциальной ямы,  $d$  — ее размеры.

## 62 Химическая связь. Молекулы

### Химическая связь

Взаимодействие атомов в молекулах осуществляется валентными электронами. **Валентность** — число электронов, которые атом может отдать или присоединить (чтобы завершить внешнюю электронную оболочку).

Сначала появилось объяснение гетерополярных химических соединений (**теория Косселя**), образующихся благодаря перераспределению электронов во внешних слоях атомов. По этой теории численная величина валентности (гетерополярная) определяется числом электронов, которые атом отдает другому атому (положительная ионная валентность) или получает от него (отрицательная ионная валентность). При образовании молекулы электроны во внешних оболочках атомов перераспределяются так, что валентности атомов насыщаются.

Позднее в исследовании образования молекулы появилась **теория Гайтлера–Ландена**. Согласно ей, при образовании гомеополярной молекулы водорода имеет место взаимная компенсация спинов валентных электронов. Обобщая эти результаты, можно сделать вывод, что образование гомеополярных молекул происходит при условии взаимной компенсации спинов валентных электронов, поэтому подобную валентность иногда называют спиновой.

В случае, если  $s + p$  подгруппа ( $d$  подгруппа расположена более глубоко, поэтому не учитывается) заполнена менее чем на половину, атом отдает валентные электроны, приобретая положительный заряд; если же она заполнена более чем на половину, атому энергетически выгоднее присоединить электроны другого атома, чтобы дополнить внешнюю орбиталь до восьми электронов.

Простейшая молекула с ковалентной связью — водород. Неразличимость электронов приводит к существованию **обменного взаимодействия**, возникающего между двумя электронами. Следствием этого взаимодействия является обобщение электронов обоих атомов, причем обобщаться электроны

могут лишь в том случае, когда их спины направлены противоположно (принцип Паули).

**Характеристики химической связи:** энергия, длина, прочность и насыщаемость. **Длина связи** – эффективное расстояние между центрами атомов. **Энергия связи** – энергия, необходимая для разрыва химической связи. **Прочность связи** – обратная к длине связи величина. **Насыщаемость связи** – валентные возможности атомов, образующих химическую связь: возможность образования связи определяется числом неспаренных электронов; валентные возможности атомов определяются числом связанных электронных пар.

**Молекулярная орбиталь** – волновая функция электрона, находящегося в поле атомных ядер и усредненном поле остальных электронов. **Метод молекулярных орбиталей** – метод квантовой химии, основанный на представлении о том, что каждый электрон молекулы описывается своей орбиталью.

Валентные электроны молекулы находятся не в  $s$ - или  $p$ -состояниях, а в смешанном  $s - p$ -состоянии. На практике каждую молекулярную орбиталь представляют как линейную комбинацию атомных орбиталей. Построенная таким образом волновая функция молекулы уточняется вариационным методом, что позволяет приблизительно определить энергию состояния молекулы, объяснить некоторые ее свойства и ее структуру.

## Адиабатическое приближение

Существует два вида химических связей: **гетеро-** и **гомомолекулярная** (т.е. ионная и ковалентная). В случае ионной связи обобщенная электронная оболочка смещается к одному из атомов. При ковалентной связи атомы обобщают электронную оболочку симметрично.

Теорию квантовомеханического обобщения ковалентной связи разработа-

ли Гайтлер и Ланден. УШ для молекулы:  $\hat{H}\psi_{ij} = E\psi_{ij}$ , где

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1}_{\text{первая молекула}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2}_{\text{вторая молекула}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e}\sum_{i=1}^N\Delta_i}_{\text{электроны}} + \underbrace{U(\vec{r}_i, R_{ji})}_{\text{энергия взаимодействия}}.$$

Рассмотрим приближение  $m \gg m_e$ : движение молекулы можно разбить на движение ядер и быстрое движение электронов.  $\hat{H} = \hat{T}_R + \hat{T}_r + U$ . **Адиабатическое приближение:** ядра считаются совершенно неподвижными. В последующих приближениях можно учесть движение ядер в виде малых поправок:  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T}_R$ , где  $\hat{H}_0 = \hat{T}_r + U$ .

Молекулярные спектры состоят из полос, каждая из которых имеет тонкую структуру. В соответствии с возможными типами движений в молекуле, волновая функция молекулы может быть приближенно представлена в виде произведения трех функций, отвечающих электронным движениям, колебаниям и вращениям молекулы. В итоге решение уШ будет состоять из трех слагаемых:  $E = E_e + E_v + E_r$ , где  $E_e = U_{0m}(R_{0m})$  – эффективное значение потенциальной энергии;  $E_v = \hbar\omega_v(v + 1/2)$  – энергия колебаний в молекуле;  $E_r = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu R_{0m}^2} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}$  – вращательная энергия. Здесь  $I$  – момент инерции молекулы относительно оси проходящей через ее центр;  $J$  – вращательное квантовое число;  $v$  – колебательное квантовое число. Из решения получим следующие **выводы**:

1. медленное движение ядер приводит к расщеплению энергетического терма на ряд уровней, характеризующихся своими значениями  $v$  и  $J$ ;
2.  $U(R)$  близка к параболе лишь при  $r \ll R_{0m}$  (эффективный радиус молекулы);
3.  $E_e \sim 1$  эВ,  $E_v \sim 0.1$  эВ;  $E_r \sim 10^{-4}$  эВ.

В зависимости от энергии молекулы (т.е. температуры вещества) может наблюдаться один из следующих видов спектральных полос: вращательные, колебательно–вращательные и электронно–колебательные.

## Молекулярные термы

Электронные термы молекул не отличаются по своему происхождению (хотя их значительно больше) от электронных термов изолированных атомов. Любой атом в молекуле находится в электрическом поле остальных ее атомов. Оно вызывает расщепление электронных уровней атомов в молекуле. Электронные уровни в молекуле образованы из электронных уровней ее атомов, расщепленных на многочисленные подуровни в результате эффекта Штарка во внутримолекулярном поле.

В двухатомных молекулах силовое поле обладает осевой симметрией относительно оси симметрии молекулы. Абсолютное значение проекции общего орбитального момента на эту ось обозначается  $\Lambda$ . Соответственно, термы с  $\Lambda = \overline{0, 1, 2, \dots}$  обозначают  $\Sigma, \Pi, \Delta, \dots$ . Кроме того, каждое электронное состояние должно характеризоваться полным спином,  $S$ , всех электронов в молекуле. При заданном значении  $S$  возможно  $v = 2S + 1$  состояний. Величина  $v$ , также как и в атоме, определяет мультиплетность терма.

При смещении из равновесных положений атомов в молекуле могут возникать их колебания около положения равновесия. Они рассматриваются как причина возникновения колебательных спектров молекул. При малых колебаниях молекулы уШ сводится к уравнению гармонического осциллятора. В случае ангармонических колебаний двухатомной молекулы, ее энергетический колебательный спектр будет иметь квадратичный член.

Возможны два основных вида вращения молекул: вращение молекулы как целого вокруг некоторого направления или точки и вращение одних частей молекулы относительно других (внутреннее вращение). Энергетический спектр вращения двухатомной молекулы как целого находится путем решения уШ для жесткого ротатора. При вращении молекулы возникает внутримолекулярное магнитное поле, в котором вырожденные термы, отвечающие значениям  $\pm\Lambda$ , расщепляются на два.

Электронно-колебательные спектры молекул связаны электронными переходами в атомах молекулы, колеблющихся около своих равновесных положений. Наложение колебательного спектра на электронный проявляется в

том, что каждой линии электронного перехода соответствует ряд колебательных линий, образующих **полосу**.

Для электронных спектров молекул существуют **правила отбора**:  $\Delta\Lambda = 0, \pm 1$ ,  $\Delta\Sigma = 0$ ,  $\Delta\Omega = 0, \pm 1$ , где  $\Omega = \Lambda \pm \Sigma$  – внутреннее квантовое число молекулы. Существует **правило рекомбинационного запрета**, согласно которому запрещены комбинации между термами различной мультиплетности.

Электронные переходы в молекулах совершаются настолько быстро, что за время переходов не успевают существенно измениться ни расстояния между ядрами в молекуле, ни их импульсы. Электронные переходы происходят при практически постоянном расстоянии между ядрами. Такой стационарности внешних условий в течение перехода соответствует большая его вероятность, а значит и интенсивность соответствующих спектральных линий (**принцип Франка–Кондона**, вытекающий непосредственно из адиабатического приближения).

В случае незапрещенного электронного перехода вращательно–колебательные спектры молекул образуются при изменении колебательного состояния, которое практически всегда сопровождается изменением их вращательного состояния. Частоты вращательного спектра намного меньше частот колебательного спектра. В результате наложения малых вращательных частот на колебательные, линии колебательного спектра превращаются в полосы, представляющие собой группы вращательных линий. В результате возникает **линейчато–полосатая структура** вращательно–колебательного спектра. При наложении вращательно–колебательного спектра на электронный, влияние вращательного движения существенно лишь при очень больших значениях  $v$  и  $J$ .

## Элементы стереохимии

**Стереохимия** — область химии, изучающая пространственное строение молекул и влияние его на физические свойства вещества (статистическая стереохимия) и направление и скорость химической реакции (динамическая сте-

реохимия).

Пространственное строение молекул характеризуется направленностью связи, причина этого — в различном распределении электронных облаков в пространстве. Так,  $s$ -орбиталь в стереохимии представлена в виде сферы,  $p$ -орбиталь — гантели. За счет взаимодействия  $s$ - и  $p$ -орбиталей атома происходит их **гибридизация** — изменение формы орбиталей. Так,  $s - p$ -орбиталь представляет собой структуру, состоящую из комбинации двух несимметричных гантелеобразных облаков, погруженных друг в друга;  $s - p^2$ -орбиталь представляет собой  $Y$ -образную структуру;  $s - p^3$ -орбиталь — тетрагональную структуру.

Взаимодействие молекул с различными формами орбиталей приводит к различию пространственных ориентаций этих молекул. Форма молекул определяет плотность, прочность и прочие физические и химические свойства вещества.

## 63 Основы квантовой теории твердого тела

### Модели твердого тела

ТТ классифицируются по характеру межатомных связей: металлические, ковалентные, ионные и молекулярные. Часто обособляют кристаллы с водородной (типа воды) связью. Также ТТ можно классифицировать по электрическим свойствам: проводники, изоляторы, полупроводники, полуметаллы.

При взаимодействии атомов разных сортов характер химической связи определяется их способностью захватывать или отдавать валентный электрон (**электроотрицательность**).

**Из классических моделей** ТТ известны приближения свободных и независимых электронов.

В приближении свободных электронов не учитывается влияние положительных ионов на движущиеся электроны в промежутках между их столкновениями. **Теория Друде**: электронный газ не взаимодействует с ионами, в

период между столкновениями электронов они обладают одинаковыми скоростями. **Теория Лоренца:** свободные электроны имеют максвелловское распределение по скоростям. **Теория Зоммерфельда:** свободные электроны имеют распределение Ферми–Дирака.

В приближении независимых электронов предполагается взаимодействие электронов с ионами, но не учитывается взаимодействие электронов между собой.

Классические модели не отвечают на вопрос: почему проводимость ТТ меняется в очень широких пределах (одни из тел — проводники, другие — диэлектрики, при определенных условиях возможно возникновение сверхпроводимости). На данный вопрос способна ответить квантовая теория ТТ — приближение **зонной теории**.

## Зоны Бриллюэна. Энергетические зоны

Стационарное состояние электронов в ТТ определяется уШ  $\hat{H}\psi = E\psi$ ,  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$ .

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N); \quad \hat{T} = -\left(\sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \sum_k \frac{\hbar^2}{2M_k} \Delta_k\right);$$

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{1}{2} \sum_{l,k \neq l} \frac{Z_k Z_l e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{R}_k - \vec{R}_l|} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{Z_k e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{R}_k|};$$

где  $m$  — масса электрона,  $M_k$  — масса ядра вида  $k$ ,  $\vec{r}$  — РВ электрона,  $\vec{R}$  — РВ яра.

Согласно **адиабатическому приближению** (которое также называют **приближением Борна–Оппенгеймера**), можно не учитывать энергию взаимодействия ядер. Т.о., волновая функция электронов считается зависимой только от их фазовых координат.

Помимо приближения Борна–Оппенгеймера, используется **валентная аппроксимация**, т.е. воздействие всех электронов внутренних оболочек атома сводится к экранированию кулоновского поля ядра, а уШ решается только для валентных электронов.

Однако, даже воспользовавшись всеми приведенными выше приближениями, оказывается еще невозможным решить уШ. Воспользуемся **первым приближением Хартри–Фока**: потенциальную энергию взаимодействия электронов сведем к сумме взаимодействия отдельного электрона с усредненным полем остальных электронов (такое поле называют **самосогласованным**):

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \longrightarrow \sum_i \tilde{U}_i(\vec{r}_i).$$

Тогда  $\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \tilde{U}_i(\vec{r}_i) + U_i(\vec{r}_i)$ , где  $U_i$  – потенциальная энергия  $i$ -го электрона в поле атомных ядер. УШ:  $\hat{H}\psi = E\psi$ , где  $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \prod_i \psi_i(\vec{r}_i)$ . А т.к.  $\hat{H}_i \psi_i = E_i \psi_i$ , получим:  $E = \sum E_i$ .

Чтобы удовлетворить принципу Паули, вводят антисимметричную волновую функцию – **определитель Слэтера**:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_1(\vec{r}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_n(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_n(\vec{r}_n) \end{vmatrix}.$$

Поле  $\tilde{U}_i$  называется самосогласованным, т.к. для его нахождения необходимо знать все  $\psi_i$ , однако, для нахождения  $\psi_i$  необходимо знать  $\tilde{U}_i$ . Для решения данной задачи используют вариационные методы.

Пусть  $V(\vec{r}) = \tilde{U}(\vec{r}) + U(\vec{r})$ . Тогда, т.к. атомы в кристалле расположены строго периодически, можно утверждать, что  $V(\vec{r})$  обладает трехмерной периодичностью. Для получения фундаментальных результатов оказывается достаточным знать, что период  $V$  совпадает с периодом решетки.

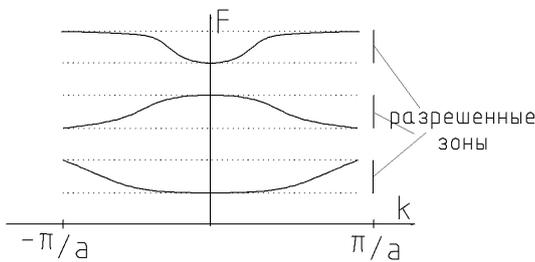
Волновые функции электронов выражаются посредством **функций Блоха**:  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = U_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ , где  $\vec{k}$  – волновой вектор электрона,  $k = 2\pi/\lambda_{dB}$ , где  $\lambda_{dB}$  – дебройлевская длина волны электрона,  $U_{\vec{k}}$  – периодическая функция.

Функции Блоха удовлетворяют условию периодичности:  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{n}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ , где  $\vec{n} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$  – **вектор трансляции** кристаллической решетки. Волновой вектор  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$  связан с импульсом электрона.

Введем понятие **обратной решетки**. Вектор обратной решетки  $\vec{H} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ , где  $\vec{a}^* = \vec{b} \times \vec{c}/V$ ,  $\vec{b}^* = \vec{c} \times \vec{a}/V$ ,  $\vec{c}^* = \vec{a} \times \vec{b}/V$ ,  $V$  – объем элементарной ячейки кристалла. Объем обратной ячейки  $V^* = 1/V$ .

По определению,  $\vec{H}\vec{n} = 1$ . Следовательно,  $\psi_{\vec{k}} = \psi_{\vec{k}+2\pi\vec{H}}$ . Т.о., состояния  $\vec{k}$  и  $\vec{k} + 2\pi\vec{H}$  физически эквивалентны, это означает, что *волновая функция и энергия электрона в кристалле являются периодическими функциями с периодом  $2\pi\vec{H}$* .

Если в  $\vec{k}$ -пространстве построить решетку  $2\pi\vec{a}^*$ ,  $2\pi\vec{b}^*$ ,  $2\pi\vec{c}^*$ , то все  $\vec{k}$ -пространство можно разделить на области с физически эквивалентными свойствами — **зоны Бриллюэна** (зБ). Первая (основная) зБ — многогранник минимального объема, построенный вокруг начала координат  $\vec{k}$ , содержащий все возможные электронные состояния. Последующие зБ строятся так: выбранный за начало отсчета предыдущей зоны узел соединяют отрезками с ближайшими эквивалентными узлами, а затем строят плоскости, проходящие перпендикулярно этим прямым через их середины.



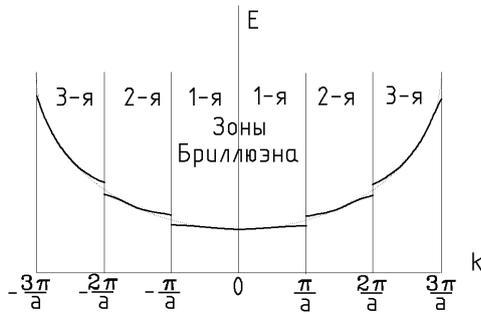
Т.к. кристалл имеет ограниченный объем,  $\vec{k}$  может иметь только дискретный ряд значений. Для полного описания всей совокупности состояний электрона в кристалле достаточно рассмотреть только область  $\vec{k}$ , ограниченную первой зБ, число  $k$  в этой зоне равно числу элементарных ячеек в кристалле.

**Энергетическая зона** — совокупность всех энергетических уровней электрона, описываемых функцией  $E_{n,\vec{k}}$  при фиксированном значении  $n$ . Все возможные значения  $E$  в каждой энергетической зоне можно получить путем изменения  $\vec{k}$  в пределах первой зБ (**схема приведенных зон**).

В энергетических схемах удобно также оперировать **эффективной массой электрона**:  $m^* = \hbar^2 \left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}$ .

В энергетическом спектре электронов существуют разрывы при  $k = n\pi/a$  (на границах зБ). Это объясняется тем, что при таких значениях  $k$  выпол-

няются условия Вульфа–Брэгга  $n\lambda = 2a$ , т.е. функция Блоха представляет собой стоячую волну, т.к. электрон при движении испытывает брэгговское отражение.

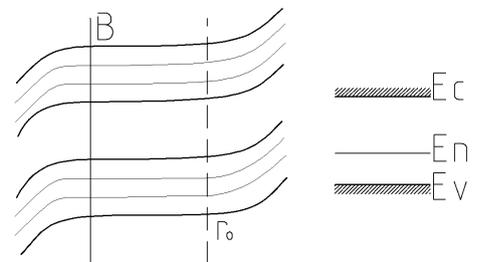


Т.о., образуются две комбинации: симметричная и антисимметричная, отвечающие двум уровням энергии — меньшему и большему, в интервале между ними нет ни одного свободного значения энергии электрона (запрещенная зона).

## Примеси и примесные уровни. Дефекты

Присутствие дефекта или примеси приводит к возникновению возмущения в периодическом потенциале решетки. Это возмущение локализовано в малой области с центром в  $\vec{r}_0$ , в котором расположен атом примеси или дефект.

Наложение на  $V(\vec{r})$  возмущения  $U(\vec{r} - \vec{r}_0)$  приводит к отщеплению уровней от разрешенной зоны. Т.о., в запрещенной зоне появляются разрешенные уровни. Электрон с энергией  $E_{\text{л}}$  локализован в области возмущения.



Для нахождения простых периодических решений используют **метод эффективной массы**:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta + U(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2}\right)^{-1}.$$

Для изменения свойств кристаллов зачастую в них специально вводят различные примеси. Так, в полупроводники вводят акцепторные и донорные примеси для формирования различных типов примесной проводимости.

**Классификация дефектов:** точечные (вакансии, атомы в междоузлиях); линейные (дислокации, микротрещины); поверхностные (границы кристалла, дефекты упаковки, стенки доменов); объемные (микропустоты,

вкрапления другой фазы).

Точечные дефекты делятся на дефекты по Френкелю (атом покидает узел, в результате чего образуется вакансия и атом в междоузлии) и по Шоттки (атом покидает кристалл — образуется вакансия). Дислокации делятся на краевые и винтовые. Для характеристики дислокаций вводят понятия **контура** и **вектора Бюргера**.

## Статистика носителей заряда. Неравновесные электроны и дырки

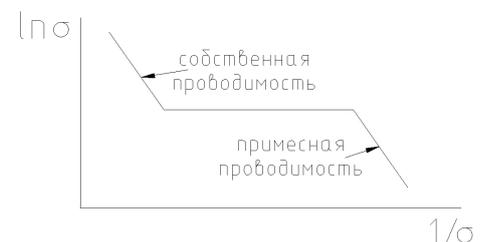
Проводимость полупроводников осуществляется электронами и дырками,  $\sigma = en_e\mu_e + e^+n_p\mu_p$ , где  $\mu$  — подвижность соответствующего носителя заряда,  $n$  — концентрация. Т.к. в собственном полупроводнике  $n_e = n_p$ ,  $\sigma = en(\mu_e + \mu_p)$ .

Вероятность нахождения электрона на уровне с энергией  $E$  и вероятность нахождения дырки на этом уровне равны:

$$F_n(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right) + 1}, \quad F_p(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_F-E}{kT}\right) + 1}.$$

Если ширина энергетической щели,  $\Delta E \ll kT$ , электроны и дырки подчиняются распределению Больцмана:  $F_n \approx \exp\left(-\frac{E-E_F}{kT}\right)$ ,  $F_p \approx \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)$ . Т.о., при небольших концентрациях электронов и дырок они представляют собой невырожденный электронный газ, аналогичный по своим свойствам классическому идеальному газу.

Уровень Ферми,  $E_F$ , собственных полупроводников располагается ближе к зоне проводимости. В примесных же полупроводниках его положение определяется видом и концентрацией примесей. На рис. справа представлен график зависимости логарифма проводимости полупроводника от обратной температуры для примесной проводимости. При малых температурах преобладает примесная проводимость. Затем наступает истощение приме-



сей (все электроны, находящиеся на примесных уровнях, переходят в зону проводимости). После этого при дальнейшем повышении температуры остается только собственная проводимость полупроводника.

## Проводимости и кинетические свойства твердых тел

**Металлы.** Валентная зона занята электронами не полностью (один–два электрона), поэтому, хотя  $\Delta E$  и велика, проводимость металлов довольно высока за счет заполнения электронами проводимости валентных уровней. Проводимость металлов зависит от температуры: при достаточно высоких температурах происходит рассеяние электронов на фононах (из-за чего проводимость резко уменьшается). При дальнейшем росте температуры концентрация фононов растет, а концентрация электронов остается постоянной (т.к. электронный газ в металле вырожден). Т.о., сопротивление металлов растет линейно в области высоких температур за счет уменьшения подвижности электронов.

При снижении температуры доминирует рассеяние на примесях и дефектах. Подвижность электронов при этом практически не зависит от температуры, поэтому проводимость перестает изменяться при достижении определенной температуры (в некоторых чистых металлах при криогенных температурах возникает сверхпроводимость).

**Диэлектрики.** В диэлектриках валентная зона полностью заполнена электронами, при этом  $\Delta E \sim 10$  эВ. В результате диэлектрики очень плохо проводят электрический ток.

**Полупроводники.** Валентная зона заполнена целиком, однако,  $\Delta E \sim 1$  эВ, т.е. некоторые электроны могут попасть в зону проводимости. Образуется пара электрон–дырка. Введение примесей образует дополнительный энергетический уровень (у донорных примесей — ближе к зоне проводимости,

у акцепторных — к валентной зоне), что приводит к образованию свободных неравновесных носителей заряда — примесной проводимости.

## 64 Представление о квазичастицах

### Фононы, плазмоны, экситоны

Коллективное движение атомов в кристалле представляет собой звуковые волны, а соответствующие им возбуждения — кванты звука — называют **фононами**. Т.о., каждую моду  $\omega(\vec{k}, s)$  (где  $s = \overline{1, r}$ ,  $r$  — число атомов на элементарную ячейку) можно возбудить целым числом фононов  $\hbar\omega(\vec{k}, s)$ .

В ТТ возможны как **акустические**, так и **оптические** фононы. Т.к.  $\omega_{\text{оптич}} > \omega_{\text{акуст}}$ , то и  $E_{\text{оптич}} > E_{\text{акуст}}$ , т.е. при очень низких температурах могут возбуждаться только акустические фононы.

Введение понятия фононов позволяет рассматривать ТТ как ящик, заключающий в себе фононный газ (фононы подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, т.е. являются бозонами). В результате взаимодействия фононы могут рождаться и исчезать, т.о., число фононов в ТТ не постоянно. При  $T \rightarrow 0$  число фононов  $N \rightarrow 0$ .

**Плазмон** — квант колебаний плотности плазмы, при которых частицы разных знаков смещаются друг относительно друга, вызывая колебания ЭП в плазме.

**Экситон** — устойчивая пара электрон–дырка с  $E < \Delta E$ , т.е. ширины запрещенной зоны (в противном случае электрон станет свободным). Экситоны легко возникают в диэлектриках, где велико значение ширины запрещенной зоны. В полупроводниках энергия экситона мала и экситонные орбиты могут охватывать лишь несколько элементарных ячеек кристалла. В металлах возникновение экситонов в результате поглощения кванта излучения маловероятно.

Экситонные состояния приводят к поглощению излучения в длинноволновой части спектра:  $\hbar\omega = \Delta E - E_{EX}/m_e^2$ , где  $\Delta E$  — ширина запрещенной

зоны,  $E_{EX}$  – энергия экситона.

**Экситон Френкеля** — экситон с очень малой энергией. Он располагается в пределах одного узла кристаллической решетки. **Экситон Ванье–Мотта** имеет очень большую энергию и его размеры значительно превышают межатомные расстояния.

## Конденсация бозонов

ИГ бозонов подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна  $dn(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}) - 1}$ , где  $dN(\varepsilon)$  – среднее число энергетических уровней с  $E \in (\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ . Для бозонов величина  $\mu < 0$ , причем  $\frac{\partial\mu}{\partial T} < 0$ . Следовательно, при уменьшении  $T$   $\mu \rightarrow 0$ . Максимум  $\mu$  достигается при некоторой температуре  $T_0$ . Для всех известных бозонных газов она очень мала ( $\sim 1 \div 2$  К), но  $T_0 \neq 0$ ,  $\Rightarrow$  существует область, где  $\mu = 0$ . В этой области число частиц, равномерно заполняющих энергетические уровни,  $N'$ , меньше полного числа частиц в системе,  $N$ . Остальные частицы находятся в особом состоянии на нижнем энергетическом уровне. Т.о., при уменьшении температуры бозе-газ переходит из обычного газообразного состояния в состояние **бозе–конденсата**. Все бозоны занимают нулевой уровень энергии. При этом наблюдаются особые эффекты типа сверхпроводимости.

## Электронно–фононный гамильтониан. Сверхпроводимость. Модель БКШ

Микроскопическую теорию сверхпроводимости разработали Бардин, Купер, Шриффер и Боголюбов (**модель БКШ**).

Сопротивление металлов обусловлено взаимодействием электронов с фононами, порожденными колебаниями кристаллической решетки. Такое взаимодействие приводит к рассеянию электронов.

В случае неподвижных ионов, волновая функция электрона выражается через **функцию Блоха**:  $\psi_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k}\vec{r})U_{\pi}(\vec{r})\chi_{\sigma}$ , где  $\chi_{\sigma}$  – спиновая ком-

понтента волновой функции. Электронная волновая функция всего металла является несимметричным произведением (определителем) волновых функций каждого электрона, а электронный гамильтониан  $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}\sigma}^+ \alpha_{\vec{k}\sigma}$ , где  $\hat{\alpha}^+$  – оператор рождения, а  $\hat{\alpha}$  – уничтожения фермионов.

Учтем теперь, что при сдвиге иона с  $\vec{n}$  на  $\vec{\xi}_{\vec{n}}$  энергия взаимодействия электрона с ионом изменяется на  $\sum_{\vec{n}} \vec{\xi}_{\vec{n}} (\nabla_{\vec{n}} [W(\vec{r}-\vec{n})])$ . В результате получаем **электронно–фононный гамильтониан**:

$$\hat{H}_{\text{вз}} = \int \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \sum_{\vec{n}} \vec{\xi}_{\vec{n}} (\nabla_{\vec{n}} W(\vec{r}-\vec{n})) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} = - \int \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \sum_{\vec{n}} W(\vec{r}-\vec{n}) (\nabla_{\vec{n}} \cdot \vec{\xi}_{\vec{n}}) \hat{\Psi} d\vec{r},$$

здесь  $\hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{\alpha}_{\vec{k}\sigma} \exp(i\vec{k}\vec{r}) U_{\vec{k}}(\vec{r}\xi_{\sigma})$ .

Полный гамильтониан системы  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{вз}}$ , причем  $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}} + \sum_{\vec{a}} \hbar\omega_{\vec{a}} \hat{a}_{\vec{a}}^+ \hat{a}_{\vec{a}}$ , где  $\hat{a}^+$  – оператор рождения, а  $\hat{a}$  – оператор уничтожения фононов.

При  $T \rightarrow 0$  можно поступить так, как предложил **Фрёлых**: преобразовать  $\hat{H}$  с точностью до квадрата параметра электрон–фононного взаимодействия:

$$\hat{H} \approx \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}} - \sum_{\vec{k}} \nu(\vec{q}) \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{-\vec{k}} \hat{\alpha}_{-\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}},$$

где  $\vec{q} = 2\vec{k} \neq 0$ ,  $\nu(\vec{q}) = |D(\vec{q})|^2 / (\hbar\omega_{\vec{q}})$ . Функцию  $D(\vec{q})$  называют **функцией Фрёлиха**, характеризующей электрон–фононное взаимодействие.

Решение уШ показывает, что при определенных условиях между нулевым и первым возбужденным состояниями возникает энергетическая щель,  $\Delta E$ , т.о., чтобы электроны перешли в основное состояние, они должны отдать энергию  $E \geq \Delta E$ , электроны приходят в сильно коррелированные состояния и начинают двигаться парами (**куперовские пары**), при этом энергия пары меньше энергии самостоятельных электронов.

В малых ЭП любой процесс одноэлектронного рассеяния будет приводить к разрыву куперовской пары и увеличению энергии электронов, следовательно, процесс рассеяния запрещен, пока полученная извне энергия не превзойдет  $\Delta E$ .

Сверхпроводимость возникает лишь в металлах с достаточно большой энергией электрон–фононного взаимодействия,  $\Rightarrow$  хорошие проводники не могут быть сверхпроводниками, сверхпроводимостью могут обладать лишь плохо проводящие в обычном состоянии металлы (а также некоторые виды керамики).

## Сверхтекучесть

Теорию сверхтекучести разработали **Ландау** (на основе представления о квантовых жидкостях) и **Боголюбов** (метод двойного квантования).

В состоянии Бозе-конденсата операторы рождения и уничтожения бозонов становятся коммутативными:  $\hat{a}_0\hat{a}_0^+ - \hat{a}_0^+\hat{a}_0 = 0$ .

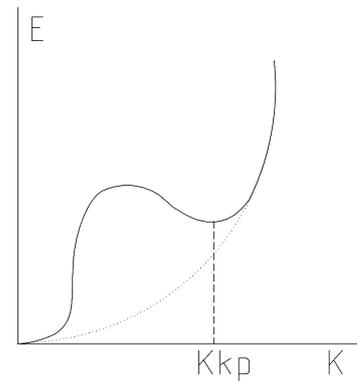
Пусть  $n_0$  – число бозонов в нулевом состоянии. Боголюбов предложил ввести для неконденсированного состояния операторы  $\hat{b}_{\vec{k}} = \hat{a}_0^+ n_0^{-1/2} \hat{a}_{\vec{k}}$  и  $\hat{b}_{\vec{k}}^+ = \hat{a}_{\vec{k}}^+ n_0^{-1/2} \hat{a}_0$ , а для конденсированного состояния, соответственно, операторы  $\hat{A}_{\vec{k}}^+$  и  $\hat{A}_{\vec{k}}$ :  $\hat{b}_{\vec{k}} = U(\vec{k})\hat{A}_{\vec{k}} + V(\vec{k})\hat{A}_{-\vec{k}}^+$ , где  $U^2(\vec{k}) - V^2(\vec{k}) = 1$ . Тогда

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_{\vec{k}} E(\vec{k})\hat{A}_{\vec{k}}^+\hat{A}_{\vec{k}},$$

оператор  $\hat{H}_0$  соответствует энергии нулевого состояния.

Характер зависимости  $E(\vec{k})$  представлен на рисунке. Штриховой линией обозначена энергия невзаимодействующих атомов.

Энергия бозонов имеет локальный минимум при  $k = k_{\text{кр}}$ , соответствующем ненулевой критической скорости. Т.о., по теории Ландау, энергия возбуждения при скоростях, меньших критической, является минимальной, и жидкость переходит в сверхтекучее состояние.



## Поляроны

Согласно классической теории, переменное ЭМП световой волны вызывает вынужденные колебания связанных зарядов — каждую молекулу среды можно рассматривать как систему осцилляторов с набором собственных частот. Т.к. массы ионов значительно превосходят массу электрона, они совершают заметные колебания только под воздействием излучения в оптическом диапазоне.

Совершая вынужденные колебания, электроны и ионы излучают вторичные волны той же частоты, интерферирующие между собой. Т.о., образуется вторичная волна, совпадающая по направлению с первичной.

Если среда оптически неоднородна, происходит рассеяние излучения. На границе двух сред происходят такие процессы, как отражение и преломление. За счет преобразования энергии ЭМВ в тепловые колебания происходит процесс поглощения излучения.

**Поляроны** — квазичастицы в диэлектрике — искаженная область решетки, локализованная вокруг электрона (или дырки) проводимости. Под действием ЭП электроны перемещаются вместе с поляризационными областями, возникает поляронная проводимость, характерная для ионных кристаллов.

Т.к. в этом случае электроны проводимости находятся в связанных состояниях, их эффективная масса значительно превосходит соответствующие массы для металлов и полупроводников, что означает значительно меньшую подвижность.

*Поляроны большого радиуса* возникают, если область искажений значительно больше межатомного расстояния. Искажения решетки при этом невелики, поляроны движутся как свободные заряды.

При сильном электрон–фононном взаимодействии возникают *поляроны малого радиуса* — перемещающиеся прыжками («прыжковая проводимость»). В слабых ЭП прыжковая проводимость не возникает.

## Оптические свойства твердых тел

Существуют следующие **виды взаимодействия** ЭМВ с ТТ: с сохранением энергии и с ее превращением. Причем взаимодействие с превращением энергии делится на виды:

1. Пропускание, рассеяние, отражение.
2.
  - Неэлектронное: фотолюминесценция, превращение энергии ЭМВ в теплоту, генерация экситонов.
  - Электронное: эмиссия электрона, генерация свободных электронов, генерация пары электрон–дырка.

Свойствами пропускания и отражения обладают диэлектрики и полупроводники. В металлах наблюдается почти полное отражение для ЭМВ с частотами, превосходящими плазменную частоту данного металла, т.к. их свойства определяются наличием свободных электронов, за счет которых проводники практически полностью не пропускают свет.

## 65 Идеальные системы в статистической механике

### Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака

**Статистика Бозе–Эйнштейна** определяет распределение бозонов по энергетическим уровням:

$$f_B \equiv \frac{dN(E)}{dg_E} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1},$$

где  $dN(E)$  – число частиц с энергиями в интервале  $(E, E + dE)$ ,  $dg_E$  – число квантовых состояний в данном интервале энергий,  $\mu = (U - TS + pV)/N$  – **химический потенциал** (работа, совершаемая в изобарно–изотермических условиях для увеличения на 1 числа  $N$ ).

**Статистика Ферми–Дирака** описывает распределение фермионов по энергетическим уровням:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}$$

Обе функции распределения вероятности можно свести к одной формуле:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + \delta}$$

где  $\delta = 1$  для статистики Ферми–Дирака и  $\delta = -1$  для статистики Бозе–Эйнштейна. Если же  $\delta = 0$  и  $\mu = 0$ , получим классическое распределение Максвелла–Больцмана.

Для статистик фермионов и бозонов характерно, что при малом количестве частиц на одно квантовое состояние они превращаются в распределение Максвелла–Больцмана:  $f = A \exp(-E/kT)$ . Действительно, это возможно лишь при  $(E - \mu)/kT \gg 1$ , при этом  $E \gg \mu$  и химическим потенциалом (также как и единицей в знаменателе) можно пренебречь.

## Ферми–газ при низких температурах. Электронный газ в металлах

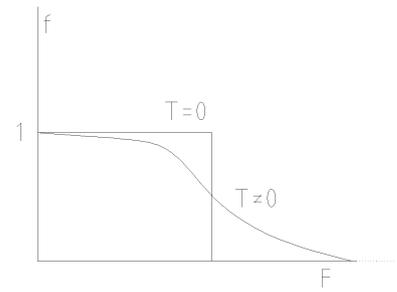
Система частиц называется **вырожденной**, если ее свойства, описываемые квантовыми законами, отличаются от свойств классических систем.

Величину  $A = \exp(\mu/kT)$  называют **параметром вырождения**. При  $A \ll 1$  статистики Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна переходят в статистику Максвелла–Больцмана.

**Температурой вырождения**,  $T_B$ , называется температура, при которой вырождение становится существенным. При  $T \ll T_B$  система частиц вырождена, при  $T \gg T_B$  она описывается классическими законами.

Число электронов с  $E \in (E, E + dE)$  равно  $dn_0 = 2f_F dg$ .  $dg = d\Gamma/\hbar^3 = 4\pi p^2 dp/\hbar^3$ , а т.к.  $p^2 = 2mE$ ,  $dp = \sqrt{m/2E}dE$ , получим:

$$dn_0 = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \frac{\sqrt{E}dE}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}.$$



При  $T = 0$  заняты все энергетические уровни вплоть до уровня Ферми,  $\mu_0 = E_F$ . При  $T = 0$   $dn_0 = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E} dE$ ,  $\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3}{5}E_F$ . Т.к.  $kT_F = E_F$ ,  $T_F \geq 10^4$  К, то при нормальных условиях в металлах  $kT/E_F \ll 1$ , т.е. электронный газ является вырожденным.

Химический потенциал,  $\mu(T) = E_F(1 - \frac{\pi^2}{12}(kT/E_F)^2)$ .

## Фотонный газ. Бозе–конденсация

Фотоны являются бозонами и подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Для фотонного газа необходимо положить  $\mu = 0$ , тогда

$$f_\gamma = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_\gamma}{kT}\right) - 1}.$$

Т.к.  $dN(E) = V \frac{E^2 dE}{\pi^2 c^2 \hbar^2}$  — число энергетических уровней с энергией  $E \in (E, E + dE)$ . Следовательно, если  $u(E)$  — плотность распределения энергии фотонов, то

$$u(E) dE = E dN(E) = \frac{V}{\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{E^3 dE}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1},$$

$$u(E) = \frac{V}{\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{E^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Вообще, для бозонов  $\mu < 0$  и  $\frac{\partial \mu}{\partial T} < 0$ ,  $\Rightarrow$  при определенной температуре,  $T_0$ ,  $\mu = 0$ . Значит, при  $T < T_0$  будет существовать особое состояние — **бозе–конденсат** — когда все бозоны занимают нулевое состояние.

## Квантовая теория теплоемкости идеального газа с учетом внутренних молекулярных движений

Как уже говорилось ранее,  $E_{\text{мол}} = E_{\text{пост}} + E_{\text{эл}} + E_{\text{вр}} + E_{\text{яд}} + E_{\text{кол}}$ , т.е. энергия молекулы является суммой энергий поступательного движения, электронов, вращательного и колебательного движения и ядерной энергии. При расчете теплоемкости  $E_{\text{яд}}$  и  $E_{\text{эл}}$  обычно не учитывают ввиду малости их вклада.  $E_{\text{пост}}$  имеет квазинепрерывные значения,  $E_{\text{вр}}$  и  $E_{\text{кол}}$  квантованы:  $E_{\text{пост}} = \hbar\omega(n + 1/2)$ ,  $E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2J}m(m + 1)$ . Межуровневые расстояния  $\Delta E_{\text{вр}} \ll \Delta E_{\text{кол}}$ .

Существенную роль играет расстояние между низшим вращательным уровнем и первым возбужденным,  $\Delta E_0$ . В результате столкновений молекул происходит обмен энергией между поступательными, вращательными и колебательными СС. При малых температурах, когда  $kT \ll \Delta E_0$ , вращательные и колебательные СС не возбуждаются,  $\Rightarrow$  молекула ведет себя как частица без внутренних СС. В этом случае теплоемкость,  $C_V = \frac{3}{2}R$ .

При повышении температуры,  $kT \geq \frac{\hbar^2}{2J_0}$ , вступают вращательные уровни, и теплоемкость,  $C_V = \frac{5}{2}R$ . Теплоемкость принимает такое значение вплоть до температуры  $T_{\text{кол}} = \frac{\hbar\omega}{k}$ , когда  $C_V = \frac{7}{2}R$ .

## 66 Физическая кинетика

### Микроскопическое состояние системы многих частиц в квантовой и классической теориях

Систему многих частиц можно описать динамическим, либо статистическим методами. Статистические методы имеют более широкое применение (т.к. являются более простыми). Кроме того, можно использовать ТД подход, тогда нас совершенно не будет интересовать строение системы.

Микроскопическое состояние характеризуется  $6N$  переменными, которые следует рассматривать как случайные. Любая частица описывается точкой в ФП и характеризуется плотностью вероятности (непрерывной величиной).

Часто предполагают, что частицы описываются дискретными величинами, осуществляя таким образом переход к вероятности нахождения частицы в данном элементе ФП, а не к плотности вероятности.

Классическая теория рассматривает микросостояние как состояние совокупности частиц, способных занимать определенное положение в пространстве. Пространство делится на ячейки по размеру частицы. Однако, классическая механика не смогла получить распределение частиц по скоростям.

Квантовая механика показала, что частица занимает в ФП ячейку объемом  $2\pi\hbar^3$ . Согласно постулату равновероятности, все микросостояния равновероятны. **Эргодическая гипотеза** постулировала равенство среднего по времени и среднего по ансамблю для большого количества частиц.

## Теорема Лиувилля и уравнение Лиувилля для классической функции распределения

Воспользуемся эргодической гипотезой, и вместо изучения эволюции системы во времени будем изучать огромное множество одинаковых подсистем, отличающихся только начальным составом (суть **статистического метода Гиббса**). При таком подходе состояние **статистического ансамбля** (т.е. этого множества подсистем) характеризуется «фазовым облаком» — совокупностью точек ФП. При этом все точки движутся независимо.

Перемещение фазового облака можно рассматривать как течение фазовой жидкости. Для него уравнение непрерывности:  $-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}(\rho\vec{v})$ , где  $\rho$  — число частиц в единице фазового объема,  $\vec{v}$  — скорость течения фазовой жидкости. Т.к.  $-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{6N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\vec{v}_i)$ ,  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho\dot{p}_i) \right) = 0;$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[ \dot{q}_i \frac{\partial\rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial\rho}{\partial p_i} + \rho \left( \frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right] = 0.$$

Воспользуемся гамильтоновой формой уравнений движения:  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ , тогда  $\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}$ , получим **уравнение Лиувилля**:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = 0.$$

**Теорема Лиувилля:** *функция распределения вероятностей микросостояний квазинепрерывной подсистемы постоянна вдоль фазовой траектории.*

Из теоремы Лиувилля следует, что объем элемента ФП, занятого совокупностью фазовых точек, в процессе движения этих точек остается неизменным по величине (хотя форма элемента может меняться):  $\Delta\Gamma = \text{const}$ . Т.о., движение фазового ансамбля подобно движению несжимаемой жидкости.

## Цепочка уравнений Боголюбова для неравновесных функций распределения

Рассмотрим кинетическое уравнение Лиувилля  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + [H, \omega] = 0$ , где  $H = H_0 + H_1$ ,  $[H, \omega] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \omega}{\partial r_i} - \frac{\partial H}{\partial r_i} \frac{\partial \omega}{\partial p_i}$ ,  $H_0 = \sum_{i=1}^N (p_i^2/2m + U(\vec{r}_i))$ ,  $H_1 = \sum_{i<j} \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ ,  $\omega = \omega(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$ .

Введем, следуя Боголюбову, последовательность корреляционных функций, исходя из уравнения Лиувилля для матрицы плотности,  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = [H, \omega]_{\text{кл}}$ . Тогда получим одночастичную функцию распределения:  $F_1(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1) = V \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dp_1}$ , двухчастичную функцию:  $F_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = V^2 \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dr_2 dp_1 dp_2}$  и так далее.

Поддействуем на уравнение Лиувилля  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \sum \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \omega}{\partial q_i} \right)$  оператором  $N \int \prod_{i=1}^N d\vec{r}_i \cdots d\vec{r}_N d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_N$ , учтя, что

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} = \frac{\partial H_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U(r_1)}{\partial r_1} + \sum_{i=2}^N \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|)}{\partial r_1}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial p_1} = \frac{N}{V} \sum_{i=2}^N \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_N|)}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left( V^2 \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dr_2 dp_1 dp_2} \right).$$

Получим **первое уравнение цепочки Боголюбова**:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r_1}{\partial p} = \frac{N}{V} \int \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial F_2}{\partial p} dr' dp'.$$

Итак, получили цепочку уравнений, зацепляющихся через интегральный член:  $L_1(F_1) = \Phi_1(F_2)$ ,  $L_2(F_2) = \Phi_2(F_3)$  и т.д. Однако, не все уравнения из цепочки имеют решение, несущее физический смысл.

Основная задача кинетической теории — построение замкнутого уравнения, например,  $L_1(F_1) = \tilde{\Phi}(F_1)$ , которое называется **интегралом столкновений**.

Важную роль играет **принцип ослабления корреляции**:

$$F_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) |_{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty} \rightarrow F_1(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1) F_1(t, \vec{r}_2, \vec{p}_2).$$

## Приближение самосогласованного поля. Уравнение Власова

Рассмотрим систему частиц с кулоновским взаимодействием:  $\Phi = \pm e^2/R = \Phi(R)$ . Будем считать систему в целом электрически нейтральной. Т.к. радиус взаимодействия бесконечен, каждая частица постоянно взаимодействует со всеми остальными, также и все частицы, действуя на данную, создают в точке ее нахождения общее поле, индивидуальные вклады в которое от какой-либо одной из них пренебрежимо малы. Такое поле является самосогласованным. Оно описывается функциями, не чувствительными к нумерации частиц. Корреляционные функции взаимодействия частиц пренебрежимо малы:

$$F_2(t, \vec{r}, \vec{r}', \vec{p}, \vec{p}') = F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) F_2(t, \vec{r}', \vec{p}') + G_2(t, \vec{r}, \vec{r}', \vec{p}, \vec{p}') = F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) F_1(t, \vec{r}', \vec{p}').$$

Во взаимодействии лидирует электростатическое. Радиус экранирования (**радиус Дебая**),  $R_D$ , оценивается в рамках равновесной теории.

Для реализации самосогласованного поля необходимо участие большого числа частиц внутри сферы радиуса  $R_D$ , т.е. среднее расстояние между ними

будет значительно меньше  $R_D$ , или  $v/R_D^3 \ll 1$  ( $v = V/N$  – удельный фазовый объем на одну частицу). При этом, чтобы самосогласованное поле не разрушалось индивидуальными корреляциями, расстояние между частицами должно значительно превосходить диаметр частиц (т.е. плазма должна быть достаточно разреженной). Частица должна находиться внутри сферы радиуса  $R_D$  достаточно долго по сравнению с временем релаксации.

Ограничиваясь основным членом  $F_2$  и подставляя его в первое уравнение цепочки Боголюбова, получим интеграл столкновений вида

$$\Phi_1(F_2) = \frac{\partial \tilde{U}(t, r)}{\partial r} \frac{\partial F_1(t, \vec{r}, \vec{p})}{\partial p},$$

где  $\tilde{U} = \frac{1}{v} \int \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{r}' d\vec{p}'$  – потенциал самосогласованного поля.  $\frac{N}{v} \int F_1 d\vec{p}' = n(t, \vec{r}')$ ,  $\Rightarrow$  получим уравнение Власова:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{\partial(U + \tilde{U})}{\partial r} \frac{\partial F_1}{\partial p} = 0.$$

## Плазменные колебания

Дальнодействующий характер кулоновских сил взаимодействия определяет существование в плазме свободных колебаний. Созданное в некоторый момент времени изменение плотности электронов в плазме не релаксирует, как плотность в обычном газе, а колеблется с определенной частотой, зависящей только от концентрации электронов (т.к. изменение плотности электронов вызывает возникновение объемного заряда).

Рассмотрим параллелепипед  $dV = S dx$ . Т.к. массы ионов довольно велики, будем считать их неподвижными. Пусть электрон претерпевает смещение  $\xi(x)$ . Тогда возникнет объемный заряд

$$dq = enS\xi(x) - enS\xi(x+dx) \approx -en \frac{d\xi}{dx} = -en \frac{d\xi}{dx} dV, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{dq}{dV} = -en \frac{d\xi}{dx}}.$$

Уравнение движения электрона имеет вид  $m\ddot{\xi} = -ne^2\xi$ ,  $\Rightarrow \ddot{\xi} + ne^2\xi/m = 0$ ,

$\xi = \xi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{m}}}$  – ленгмюровская частота (частота

возникающих в плазме электронных колебаний). Наличие колебаний в плазме было установлено Рэлеем и Ленгмюром.

## Уравнение кинетического баланса. Принцип детального равновесия

Благодаря движению частиц, поле, созданное системой, флуктуирует — движение частицы оказываются стохастическим (т.е. вероятностным).

Пусть  $W(y, x|\tau, t)$  — плотность вероятности перехода частицы из точки  $x$  в точку  $y$  за время  $\tau$ ,  $t$  — время выхода точки из  $x$ . Тогда вероятность перехода  $dw = W(y, x|\tau, t) dy$ . Если переход  $x \rightarrow y$  не зависит от предыстории системы, процесс называется **марковским**.

Введем **принцип детального равновесия**: будем считать вероятности прямого и обратного переходов одинаковыми (т.е. считаем физические законы симметричными относительно замены  $t \rightarrow -t$ ).

Разложим  $W$  при малых  $\tau$  по степеням  $\tau$ , ограничившись двумя первыми членами:  $W(y, x|\tau, t) \approx \Phi(y, x, t) + \tau P(y, x, t)$ , где  $P$  — вероятность перехода  $x \rightarrow y$  за единицу времени;  $\Phi$  — вероятность «мгновенного» перехода. Т.к. за время  $\tau = 0$  частица не может покинуть  $x$ ,  $\Phi(y, x, t) = A(y, t)\delta(y - x)$ .  $\int W dy = 1$ ,  $\Rightarrow A(x, t) = 1 - \tau \int P(y, x, t) dy$ ,  $\Rightarrow$

$$W(y, x|\tau, t) = \left(1 - \tau \int P(z, y, t) dz\right) \delta(y - x) + \tau P(y, x, t).$$

Выясним связь  $W$  с функцией  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f(x, t)$ . Пусть при  $t = 0$   $f = f(x, 0)$ . Для изменения числа частиц в  $dx$  за время  $t$  имеем:

$$[f(x, t) - f(x, 0)] dx = dx \int [W(x, z|t, 0)f(z, 0) - W(z, x|t, 0)f(x, 0)] dz.$$

Т.к.  $\int W dz = 1$ , получим:  $f(x, t) = \int W(x, z|t, 0)f(z, 0) dz$ . Перепишем последнее уравнение как  $f(y, t_\tau) = \int W(y, x|\tau, t)f(x, t) dx$ . Подставляя  $W$  и переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получим **уравнение кинетического баланса**:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int [P(x, z, t)f(z, t) - P(z, x, t)f(x, t)] dz.$$

Левая часть уравнения — изменение плотности числа частиц в точке  $x$  в момент времени  $t$  за единицу времени, обусловленное приходом в эту точку частиц из остальных точек (первое слагаемое) и уходом частиц (второе слагаемое).

Можно перейти от классического определения к квантово-механическим дискретным состояниям:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{i \neq j} (P_{ij}N_j - P_{ji}N_i).$$

Если система замкнута, имеет место принцип детального равновесия:  $P(x, y, t) = P(y, x, t)$ , или  $P_{ij} = P_{ji}$ .

## Уравнение Дирака

**Уравнением Дирака** называют квантовое уравнение для частиц с полуцелым спином, полученное из следующих требований:

1. уравнение для волновой функции частицы  $\psi(x, t)$  должно быть линейным, чтобы выполнялся принцип суперпозиции состояний;
2. в уравнение должна входить первая производная  $\psi$  по времени, чтобы задание  $\psi$  в начальный момент определяло волновую функцию в любой другой момент времени;
3. уравнение должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца;
4. величина  $\psi^* \psi$  должна иметь смысл плотности вероятности нахождения частицы в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;
5. уравнение для свободной частицы должно быть построено так, чтобы состояние с импульсом  $\vec{p}$  и энергией  $E$  было его решением только в случае выполнения соотношения  $E^2 = \hbar^2 p^2 + m^2 c^4$ , или, в системе  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ :  $E^2 = p^2 + m^2$ .

Всем этим требованиям удовлетворяет система решений четырехмерной волновой функции  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ .

Ковариантный вид уравнений Дирака зависит от выбора метрики пространства-времени. Если  $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - \vec{x}^2$ , где  $g_{\mu\nu}$  – метрический тензор, то уравнение имеет вид:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

где  $\gamma$  – **матрицы Дирака**. Для четырехмерного вектора тока  $j^\mu = \psi^* \gamma^\mu \psi$  вытекает уравнение непрерывности:  $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ .

Для данного импульса  $\vec{p}$  уравнение Дирака имеет четыре линейно независимые решения: два с положительной энергией  $E = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  и два с отрицательной энергией  $E = -p_0$ . Их можно записать в ковариантном виде

$$\psi_{\pm p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(\pm p) \exp(\mp i p x),$$

где  $u(p)$  удовлетворяет уравнениям  $(\hat{p} \mp m)u(\pm p) = 0$ ,  $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \gamma^\alpha p^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $u^*(\pm p)(\hat{p} \mp m) = 0$ .

Для каждой пары  $u-u^*$  в качестве независимых могут быть выбраны решения с определенной спиральностью (проекцией спина на направление импульса)  $\lambda = 0, \pm 1/2$ . Для  $\lambda = 0$  решения свободного уравнения Дирака являются собственными функциями матрицы  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ :

$$\gamma^5 u_\lambda(\pm p) = \mp 2\lambda u_\lambda(\pm p).$$

Решения уравнения Дирака с отрицательной энергией оказались лишены смысла. Для устранения неопределенности их смысла Дирак предположил, что состоянием с минимальной энергией (вакуумным состоянием) является состояние, в котором все уровни с отрицательной энергией заполнены. Если из вакуума «вырвать» одно состояние (т.е. образовать в нем «дырку Дирака»), полученное состояние будет иметь положительную энергию. Эта частица будет иметь массу, равную массе электрона и заряд  $+e$  (позитрон). По существу, решения с отрицательной энергией требуют выхода за рамки одночастичного уравнения и осуществляются только в квантовой теории поля.

## 67 Свойства атомных ядер

### Опыт Резерфорда. Распределение зарядов в ядре

Томсоном была предложена статическая модель атома (положительно заряженный шарик с электронами внутри). Исследования Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц при прохождении ими через газы и металлические фольги показали несостоятельность модели Томсона.

Опыты Резерфорда, Гейгера и Марсдена — наблюдения треков  $\alpha$ -частиц в камере Вильсона — показали, что эти частицы проходят большое расстояние, не испытывая заметных отклонений,  $\Rightarrow$  атом является весьма прозрачным для  $\alpha$ -частиц (а не заполнен зарядом и массой). Отклонение некоторых частиц на углы  $> 90^\circ$  показало, что атом внутри имеет чрезвычайно сильное ЭП, сосредоточенное в небольшой ( $\sim 10^{-14} \div 10^{-15}$  м) области в центре атома (т.е. в его **ядре**).

Резерфорд получил формулу для дифференциального сечения рассеяния  $\alpha$ -частиц:

$$d\sigma = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

а т.к.  $d\sigma = 2\pi b db$  (где  $b$  — прицельный параметр), то экспериментально измеряя углы  $\theta$ , можно найти  $b$ .

Заряд ядра положителен и кратен заряду электрона:  $q = Ze$ . Т.о.,  $Z$  — число положительно заряженных частиц (**протонов**) в составе ядра.

Опыты по рассеиванию быстрых электронов на атомных ядрах показали, что плотность заряда распределена в ядре неравномерно.

Общие размеры ядра характеризуют **среднеквадратичный** (усредненный по плотности заряда) и **эквивалентный** (радиус шарика с равномерно распределенным зарядом,  $Ze$ ) **радиусы**. Ср. кв. радиус:

$$a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \rho(\vec{r}) 4\pi r^2 dr.$$

Экв. радиус:  $R_{\text{Э}} = a\sqrt{5/3}$ .

Наиболее универсальной моделью распределения заряда в ядре является **однородная модель Ферми**:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \frac{r - R_{1/2}}{\delta}},$$

где  $\delta$  – некоторый параметр,  $R_{1/2}$  – **радиус половинной плотности** ( $\rho(R_{1/2}) = \rho_0/2$ ).

Для легких ядер более подходит **гауссова модель**:

$$\rho(r) = \left(\frac{3}{2\pi a^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3r^2}{2a^2}\right).$$

**Выводы экспериментов:**

1. во внутренних оболочках  $\rho = \mathbf{const}$ , на периферии  $\rho$  спадает по закону Ферми. В легких ядрах заряд распределен согласно гауссовой форме, в тяжелых ядрах – согласно форме Ферми;
2. скорость спадания,  $\delta$ , для всех ядер приблизительно одинакова:  $\delta \cong 0.55$  фм;
3.  $R_{1/2}$  и  $R_\Delta$  пропорциональны  $\sqrt[3]{A}$ , где  $A$  – массовое число ядра;
4. в легких ядрах нейтроны и протоны распределены одинаково, в тяжелых же протоны концентрируются ближе к центру ядра, оболочка состоит из нейтронов.

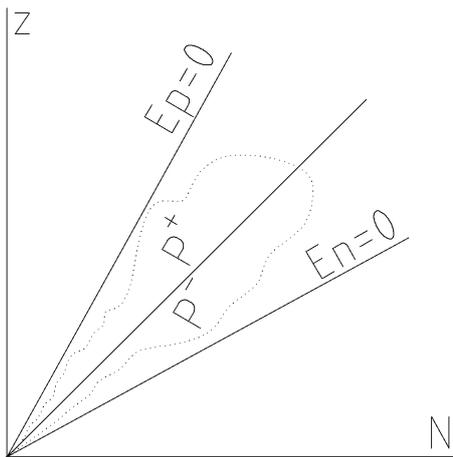
## Масса и энергия связи ядра

В теоретической физике масса ядра измеряется в энергетических единицах, в прикладной оперируют атомными единицами массы (а.е.м.). Массы протона и нейтрона порядка 1 а.е.м., т.о., масса ядра пропорциональна массовому числу. Однако,  $\sum(m_p + m_n) \neq m_{\text{ядра}}$ . **Дефект массы:**  $\Delta = m_{\text{ядра}} - A$ . **Упаковочный коэффициент:**  $f = \Delta/A$ . **Энергия связи:**  $E_{\text{св}} = -(m_{\text{ядра}} - [Zm_p + Nm_n]) = -(M - [Am_n - Z\Delta m_N])$ , где  $\Delta m_N = m_n - m_p$ . Энергия связи – это энергия, которая выделяется при объединении свободных нуклонов в ядро.

**Нуклиды** — группы ядер. В зависимости от соотношения  $A-Z$  выделяют **изотопы** (нуклиды с одинаковыми  $Z$ ), **изобары** (нуклиды с одинаковыми  $A$ ), **изотоны** (нуклиды с одинаковыми  $N = A - Z$ ), **зеркальные** (нуклиды с одинаковым **нейтронным избытком**  $T_\zeta = \frac{1}{2}(N - Z)$ ).

## Стабильные и радиоактивные ядра

Атомные ядра делят на стабильные и нестабильные (радиоактивные). **Стабильными** называют ядра, у которых спонтанный распад и превращения являются энергетически невозможными. Например, у стабильных ядер  $A < 36$ ,  $T_\zeta \leq 1$ . На плоскости  $N-Z$  стабильные ядра располагаются в окрестности кривой устойчивости, в начале кривой  $N/Z = 1$ , в конце  $N/Z = 1/6$ .



Различие стабильности изотопов находится в зависимости от четности  $N$  и  $Z$ , а также от величины  $A$ . Наиболее стабильны четно-четные ядра (четные  $Z$  и  $N$ ); четно-нечетные и нечетно-четные менее стабильны; наименее стабильными являются нечетно-нечетные ядра (из них стабильны только ядра с  $Z = N$ ).

Нестабильность ядер делят на два вида: по отношению к группам нуклонов и по отношению к изменению заряда ядра.

**Виды радиоактивности:** испускание  $\alpha$ -частиц,  $\beta^\pm$ -распад,  $K$ -захват (электронный захват из  $K$ -слоя), сопровождающиеся  $\gamma$ -излучением, деление ядра на два осколка, испускание нейтрона.

Критерием устойчивости является линия  $Z = A/(1.98+0.015A^{2/3})$ . Линии  $E_n = 0$  и  $E_p = 0$  — испускание нейтрона или протона соответственно.

## Квантовые характеристики ядерных состояний. Спин ядра. Статические мультипольные моменты ядер

В теории атомного ядра волновые функции характеризуются **четностью**. Пусть оператор  $\hat{P}$  меняет знаки координат:  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Тогда, если  $\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t)$ , волновая функция  $\psi$  является четной, если же  $\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = -\psi(-\vec{r}, t)$ , — нечетной.

Четность состояния частицы, находящейся в центральносимметричном поле и обладающей внутренней четностью,  $\xi$ , и орбитальным моментом,  $l$ , равна  $\lambda = (-1)^l \xi$ . Четность системы  $\lambda = n \lambda_k$ . Параметр  $(-1)^l$  характеризует **орбитальную четность, внутренняя четность,  $\xi$** , является четностью частицы в СК, связанной с ней. Большинство процессов протекает с *сохранением четности*.

Протоны и нейтроны обладают полуцелым спином,  $s$ . Полный момент инерции нуклона  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ ,  $j = |l - s|, l + s$ , а т.к.  $s = 1/2$ , то  $j = l \pm 1/2$ .

Атомное ядро обладает **полным моментом импульса**  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{I}$ , где  $\vec{I}$  — суммарный спиновый момент нуклонов (**спин ядра**).

Ядро определяется волновой функцией  $\psi_{IM}$ :  $\hat{I}^2 \psi_{IM} = I(I + 1) \psi_{IM}$ ,  $\hat{I}_Z \psi_{IM} = M \psi_{IM}$ , где  $M = \pm 1/2, \dots, \pm I$  (или  $M = 0, \dots, \pm I$ ),  $I = n/2$ , где  $n > 0$ .

### Закономерности:

1. у ядер с четным  $A$   $I$  целые, у ядер с нечетным  $A$  — полуцелые;
2. в основном и возбужденном состояниях спин может быть разным;
3. спины всех четно-четных ядер в основном состоянии равны нулю;
4. спины стабильных ядер лежат в интервале  $[0, 9/2]$ .

Система частиц с зарядами  $q_i$  может обладать **электрическими моментами** всех порядков, начиная с нулевого, входящими в члены мультипликативного разложения энергии взаимодействия системы с внешним ЭП. *Нулевой момент* — полный заряд ядра,  $Q = \sum q_i$ ,  $E^{(0)} = Q\varphi$ . *Первый момент* — дипольный момент,  $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$ ,  $E^{(1)} = \vec{p} \cdot (\nabla\varphi) = -\vec{p}\vec{E}$ . *Второй*

момент — квадрупольный,  $Q_{ij} = \sum_n q_n (3x_i^n x_j^n - r^2 \delta_{ij})$ ,  $E^{(2)} = -\frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_{ji}}$ .

Кроме того, у ядра существуют **магнитные моменты**, главный из них — дипольный:  $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \sum q_i |\vec{r}_i \times \vec{v}_i|$ ,  $E^{(1)} = -\vec{\mu} \vec{B}$ . Дипольный магнитный момент любого ядра в основном состоянии равен нулю.  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n + \vec{\mu}_l$ ,  $\vec{\mu}_p = g_p \mu_{\text{яд}} \vec{S}$ ,  $\vec{\mu}_n = g_n \mu_{\text{яд}} \vec{S}$ ,  $\vec{\mu}_l = g_l \mu_{\text{яд}} \vec{l}$ ,  $\Rightarrow \vec{\mu} = g \mu_{\text{яд}} \vec{I}$ .

Квадрупольный магнитный момент ядра делят на внутренний (в собственной СК),  $Q_0$ , и внешний (в лабораторной СК),  $Q$ . Такое различие связано с прецессией  $Q_0$  вокруг некоторой оси. Для большинства ядер  $Q_0 > 0$ . Внешние квадрупольные моменты ядер с  $I = 0$  и  $I = 1/2$  равны нулю вне зависимости от значения  $Q_0$ . Всегда  $Q < Q_0$ . У многих ядер  $Q_0$  довольно велики, что свидетельствует о резко несферической форме ядра.

## Радиоактивность. Законы радиоактивного распада. Статистический характер распада

**Радиоактивность** (РА) — самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц. РА делят на естественную и искусственную.

**Простой РА распад** — такой распад, при котором распадается ядро, не являющееся продуктом РА распада.

Уменьшение количества нераспавшихся ядер происходит по закону  $dN = -\lambda N dt$ ,  $\Rightarrow N = N_0 \exp(-\lambda t)$ . Вычислим **период полураспада** (время, за которое распаду подвергается половина первоначального количества РА вещества):  $N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda T_{1/2})$ ,  $\Rightarrow T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ . **Среднее время жизни ядра**,  $\tau = 1/\lambda = T_{1/2} / \ln 2$ ,  $\Rightarrow N = N_0 \exp(-t/\tau)$ . Единицу ядерной активности называют Беккерель (1 распад в секунду).

**Активность** РА распада:  $A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$ ,  $\Rightarrow A = \lambda N_0 \exp(-t/\tau)$ .

**Сложный РА распад** — такой распад, при котором распадается ядро, в данный момент являющееся продуктом распада:  $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots$  Описыва-

ется двумя ДУ:  $\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$ ,  $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$ ,  $\Rightarrow$

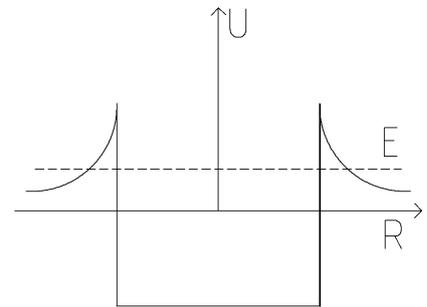
$$\begin{cases} N_1 = N_{10} \exp(-\lambda_1 t), \\ N_2 = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]. \end{cases}$$

Если  $T_{1/2}^{(1)} \gg T_{1/2}^{(2)}$  ( $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ) и  $T \ll T_{1/2}^{(1)}$ , то приближенно получим:  $N_1 = N_{10}$ . Пусть  $N_{20} = 0$ ,  $\Rightarrow N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} (1 - \exp(-\lambda_2 t))$ .  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} = \text{const}$ ,  $\Rightarrow \boxed{\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2}$  — вековое равновесие.

**$\alpha$ -распад.** Спектр  $\alpha$ -распада показывает, что у ядер существует энергетическая структура по аналогии с атомной. Существует сильная нулевая линия и ряд боковых. **Закон Гейгера–Неттола:**  $\ln \lambda = AB \ln R_\alpha$ , где  $R_\alpha$  — пробег  $\alpha$ -частицы.

**$\beta$ -распад.** К данному виду распада относятся  $\beta^-$  и  $\beta^+$  распады и  $K$ -захват.  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e + \bar{\nu}$  —  $\beta^-$ -распад;  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu$  —  $\beta^+$ -распад;  ${}^A_Z X + e \rightarrow {}^A_{Z-1} X + \nu$  —  $K$ -захват.

**Спонтанное деление.**  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-A_1}_{Z-Z_1} X_1 + {}^{A_1}_{Z_1} X_2$ ,  
 $A_1 \approx A/2$ ,  $Z_1 \approx Z/2$ .



## Экспериментальное доказательство существования нейтрино

Паули предположил, что существует нейтральная частица с нулевой массой, появляющаяся в результате  $\beta$ -распада. Существование нейтрино первым подтвердил Аллен в реакции  $K$ -захвата лития, исследуя энергию отдачи ядра, затем — в  ${}^{37}\text{Ar}$ .

Рейнес и Коуэн зарегистрировали нейтрино непосредственно с помощью реакции  $K$ -захвата: вблизи реактора установили водородный сцинтиллятор с добавкой кадмия — первое прямое доказательство существования нейтрино.

Для характеристики нейтрино,  $\nu$ , и антинейтрино,  $\bar{\nu}$ , ввели понятие лептонного заряда,  $L$ , ( $L = +1$  для  $e^-$ ,  $\mu^-$  и  $\nu$ ;  $L = -1$  для  $e^+$ ,  $\mu^+$  и  $\bar{\nu}$ ;  $L = 0$  для остальных). У нейтрино обнаружена спиральность.

Затем было открыто несохранение четности в слабом взаимодействии, что позволило описать поведение нейтрино более простыми уравнениями. Было установлено, что нейтрино является левовинтовым ( $s_\nu = -1$ ), а антинейтрино — правовинтовым ( $s_{\bar{\nu}} = 1$ ).

Позднее, помимо электронного нейтрино были обнаружены мюонное и тауонное нейтрино. Это послужило причиной введения тауонного и мюонного зарядов:  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ .

Оценка массы нейтрино показала, что их средняя масса не превышает  $30 \div 40$  эВ. Аргументом в пользу ненулевого значения массы нейтрино является «скрытая масса» гало галактики. Наличие массы нейтрино объяснило бы также формирование сверхскоплений галактик.

Космология, в зависимости от средней плотности Вселенной, прогнозирует несколько исходов ее эволюции. С этой точки зрения очень важно иметь представление о точном значении массы нейтрино. Так, если  $m_\nu \gtrsim 30$  эВ, то плотность Вселенной превосходит критическую плотность, и Вселенная будет пульсирующей, либо коллапсирующей.

## Несохранение четности в распаде

Четность,  $\lambda$ , связана с преобразованием пространственной инвариантности. Если четность сохраняется, то данный процесс является зеркально симметричным, т.о., закон сохранения четности связан с зеркальной симметричностью пространства, т.е.  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ .

Исследование реакций с учетом слабого взаимодействия (например,  $\beta$ -распад) показало, что четность в них не сохраняется.

Особенной ярко зеркальная асимметрия проявляется в свойствах нейтрино: все нейтрино обладают отрицательной спиральностью, а все антинейтрино — положительной. Но при пространственной инверсии знак спина инвертируется: «зазеркальных» нейтрино и антинейтрино в нашем мире не суще-

ствует.

## Электронные и магнитные переходы

Переход из возбужденного состояния в основное может сопровождаться испусканием  $\gamma$ -излучения (ультракоротковолновые ЭМВ). Волновые свойства  $\gamma$ -частиц проявляются очень слабо, значительно сильнее проявляются их корпускулярные свойства.

Энергия, излучаемая системой, может быть разложена на следующие части: электрическое дипольное, электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучения.

При  $\gamma$ -излучении существует ограничение на волновые функции — **правила отбора**:

- для дипольного ЭП:  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m = 0, \pm 1$ ,  $\Delta j = 0, \pm 1$  (исключая переходы  $0 \rightarrow 0$ );
- для дипольного МП:  $\Delta j = 0, \pm 1$ ;
- для квадрупольного ЭП:  $\Delta j = 0, \pm 1, \pm 2$ , запрещенными являются переходы  $0 \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  и  $0 \rightleftharpoons 1$ .

## Внутренняя конверсия

Возбужденное ядро может перейти в основное состояние еще и посредством внутренней конверсии, или конверсии с образованием электрон–позитронных пар. Явление **внутренней конверсии** на атомных электронах состоит в том, что в тяжелых возбужденных ядрах испускаются группы моноэнергетических электронов из внутренних слоев (К, L, M) электронной оболочки атома. В отличие от электронов  $\beta$ -распада, конверсионные электроны имеют линейчатый спектр.

Электроны конверсии возникают путем прямой передачи энергии электрону от ядра. Т.к. на место дырки во внутренней оболочке переходит электрон с более высокого уровня, возникает характерное рентгеновское излучение.

**Парциальный коэффициент внутренней конверсии:**  $\omega_K = N_K/N_\gamma$ , где  $N_K$  – число электронов на K-оболочке,  $N_\gamma$  – число испущенных оболочкой  $\gamma$ -квантов. Аналогично рассчитываются парциальные коэффициенты для L и M оболочек. **Полный коэффициент внутренней конверсии**  $\omega = \sum \omega_i$ .

Если энергия возбуждения ядра  $E^* > 2m_e c^2$ , может возникнуть электрон-позитронная пара. Т.к. ядро заряжено положительно, энергия образовавшихся частиц различна.

## Эффект Мёссбауэра

**Эффект Мёссбауэра** — испускание или поглощение  $\gamma$ -квантов атомными ядрами в твердом теле, не сопровождающееся изменением колебательной энергии тела, т.е. испусканием или поглощением фононов. Данный эффект аналогичен эффекту резкого поглощения света возбужденными атомами, но, в связи с тем, что на ядро действует отдача,  $E_\gamma = E - T$ . Для осуществления поглощения необходимо, чтобы  $\Delta E < \Gamma$ , где  $\Delta E = E - E_\gamma = T$ ,  $\Gamma = \hbar/\tau$  – ширина возбужденного уровня.

Т.к.  $\Delta E = \frac{E^2}{2m}$ , то для ядер ( $E \sim 1$  МэВ)  $\Delta E$  очень велико, сильно превосходя ширину возбужденного уровня. Для атомов же  $\Delta E \sim 10$  МэВ  $< \Gamma$ .

Мёссбауэр установил, что при определенных условиях резонансное поглощение становится возможным: необходимо перейти к сильно охлажденным *кристаллическим* приемнику и источнику  $\gamma$ -квантов. В небольшой доле случаев импульс отдачи берет на себя вся кристаллическая решетка, что приводит к снижению  $\Delta E$ .

Мёссбауэр измерял зависимость скорости счета детектора от скорости источника. При  $v = 0$  наблюдалось резонансное поглощение, но при скоростях в несколько см/с резонансное поглощение полностью исчезало, т.о., плавно меняя скорость источника можно исследовать форму линии поглощения.

Благодаря эффекту Мёссбауэра можно измерять очень малые изменения энергии:  $\Gamma/E \sim 10^{-11}$ . Этот эффект позволил определить гравитационное красное смещение в поле тяжести Земли.

## 68 Радиоактивность

### Деление и синтез ядер

**Радиоактивность** (от лат. radio — «излучаю», radius — «луч» и activus — «действенный») — явление спонтанного превращения неустойчивого изотопа химического элемента в другой изотоп (обычно другого элемента) (радиоактивный распад), или (реже) — явление спонтанного испускания  $\gamma$ -частиц без превращения. *Естественная радиоактивность* — самопроизвольный распад ядер элементов, встречающихся в природе. *Искусственная радиоактивность* — самопроизвольный распад ядер элементов, полученных искусственным путем через соответствующие ядерные реакции.

Э. Резерфорд экспериментально установил, что соли урана испускают лучи трех типов, которые по-разному отклоняются в магнитном поле:

- лучи первого типа отклоняются так же, как поток положительно заряженных частиц, их назвали  $\alpha$ -лучами;
- лучи второго типа отклоняются в магнитном поле так же, как поток отрицательно заряженных частиц (в противоположную сторону), их назвали  $\beta$ -лучами;
- лучи третьего типа, которые не отклоняются магнитным полем, назвали  $\gamma$ -излучением.

Энергетические спектры  $\alpha$ -частиц и  $\gamma$ -квантов, излучаемых радиоактивными ядрами, дискретные, а спектр  $\beta$ -частиц — непрерывный.

**Ядерная реакция** — процесс превращения атомных ядер, происходящий при их взаимодействии с элементарными частицами,  $\gamma$ -квантами и друг с другом, часто приводящий к выделению колоссального количества энергии. Ядерные реакции могут происходить как с выделением, так и с поглощением энергии. Реакции первого типа, экзотермические, служат основой ядерной энергетики и являются источником энергии звезд. Реакции, идущие с поглощением энергии (эндотермические), могут происходить только при условии, что кинетическая энергия сталкивающихся частиц (в системе центра масс)

выше определенной величины (порога реакции).

**Запись ядерных реакций.** Ядерные реакции записываются в виде специальных формул, в которых встречаются обозначения атомных ядер и элементарных частиц. **Первый способ** написания формул ядерных реакций аналогичен записи формул реакций химических: слева записывается сумма исходных частиц, справа — сумма получившихся частиц (продуктов реакции), а между ними ставится стрелка. Так, реакция радиационного захвата нейтрона ядром кадмия-113 записывается так:  ${}_{48}^{113}\text{Cd} + n \rightarrow {}_{48}^{114}\text{Cd} + \gamma$ .

Мы видим, что число протонов и нейтронов справа и слева остается одинаковым (барионное число сохраняется). Это же относится к электрическим зарядам, лептонным числам и другим сохраняющимся величинам (энергия, импульс, момент импульса, и т.п.). В некоторых реакциях, где участвует слабое взаимодействие, протоны могут превращаться в нейтроны и наоборот, однако их суммарное число не меняется.

**Второй способ** записи, более удобный для ядерной физики, имеет вид  $A(a, b \dots)B$ , где  $A$  — ядро мишени,  $a$  — бомбардирующая частица (в том числе ядро),  $b \dots$  — испускаемые частицы (в том числе ядра),  $B$  — остаточное ядро. В скобках записываются более легкие продукты реакции, вне — более тяжелые. Так, вышеприведенная реакция захвата нейтрона может быть записана в таком виде:  ${}_{48}^{113}\text{Cd}(n, \gamma){}_{48}^{114}\text{Cd}$ .

Первое принудительное ядерное превращение азота в кислород, которое провел Резерфорд, обстреливая азот  $\alpha$ -частицами, записывается в виде формулы  ${}_{7}^{14}\text{N}(\alpha, p){}_{8}^{17}\text{O}$ , где  $p = {}_{1}^{1}\text{H}$  — протон. В «химической» записи эта реакция выглядит, как  ${}_{7}^{14}\text{N} + \alpha \rightarrow p + {}_{8}^{17}\text{O}$ .

**Каналы и сечение реакций.** Типы и квантовое состояние частиц (ядер) до начала реакции определяют **входной канал реакции**. После завершения реакции совокупность образовавшихся продуктов реакции и их квантовых состояний определяет **выходной канал реакции**. Реакция полностью характеризуется входным и выходным каналами. Вероятность реакции опре-

деляется **поперечным сечением** реакции. В лабораторной системе отсчета (где ядро-мишень покоится) вероятность взаимодействия в единицу времени равна произведению сечения (выраженного в единицах площади) на поток падающих частиц (выраженный в количестве частиц, пересекающих за единицу времени единичную площадку). Если для одного входного канала могут осуществляться несколько выходных каналов, то отношения вероятностей выходных каналов реакции равно отношению их сечений. В ядерной физике сечения реакций обычно выражаются в специальной единице — **барнах**, равных  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>.

## Ядерный реактор

**Ядерный реактор** — устройство, в котором осуществляется управляемая цепная ядерная реакция, сопровождающаяся выделением энергии.

Преобразование вещества сопровождается выделением свободной энергии лишь в том случае, если вещество обладает запасом энергий. Последнее означает, что микрочастицы вещества находятся в состоянии с энергией покоя большей, чем в другом возможном, переход в которое существует. Самопроизвольному переходу всегда препятствует *энергетический барьер*, для преодоления которого микрочастица должна получить извне какое-то количество энергии — **энергии возбуждения**. Существуют два способа преодоления энергетического барьера: либо за счет кинетической энергии сталкивающихся частиц, либо за счет энергии связи присоединяющейся частицы.

Если иметь в виду макроскопические масштабы энерговыделения, то необходимую для возбуждения реакций кинетическую энергию должны иметь все или сначала хотя бы некоторая доля частиц вещества. Это достижимо только при повышении температуры среды до величины, при которой энергия теплового движения приближается к величине энергетического порога, ограничивающего течение процесса ( $\sim 10^7$  K).

Любой ядерный реактор состоит из следующих частей:

- активная зона с ядерным топливом и замедлителем;

- отражатель нейтронов, окружающий активную зону;
- теплоноситель;
- система регулирования цепной реакции, в том числе аварийная защита;
- радиационная защита;
- система дистанционного управления.

Основная характеристика реактора — его **выходная мощность**. Мощность в 1 МВт соответствует цепной реакции, при которой происходит  $3 \cdot 10^{16}$  делений в секунду.

Текущее состояние ядерного реактора можно охарактеризовать **эффективным коэффициентом размножения нейтронов**,  $k$ , или **реактивностью**  $\rho$ , которые связаны следующим соотношением:  $\rho = \frac{k-1}{k}$ .

Для этих величин характерны следующие значения:

- $k > 1$  — цепная реакция нарастает во времени, реактор находится в надкритическом состоянии, его реактивность  $\rho > 0$ ;
- $k < 1$  — реакция затухает, реактор подкритичен,  $\rho < 0$ ;
- $k = 1$ ,  $\rho = 0$  — число делений ядер постоянно, реактор находится в стабильном критическом состоянии.

**Критический объем ядерного реактора** — объем активной зоны реактора в критическом состоянии. **Критическая масса** — масса делящегося вещества реактора, находящегося в критическом состоянии. С целью уменьшения утечки нейтронов, активной зоне придают сферическую или близкую к сферической форму.

Ядерный реактор может работать с заданной мощностью в течение длительного времени только в том случае, если в начале работы имеет запас реактивности. Протекающие в реакторе процессы вызывают ухудшение размножающих свойств среды, и без механизма восстановления реактивности реактор не смог бы работать даже малое время. Первоначальный запас реактивности создается путем постройки активной зоны с размерами, значительно превосходящими критические. Чтобы реактор не становился надкритическим, в активную зону вводятся вещества-поглотители нейтронов. Управление

ядерным реактором упрощает тот факт, что часть нейтронов при делении вылетает из осколков с запаздыванием, которое может составить от 0.2 до 55 с. Благодаря этому, нейтронный поток и, соответственно, мощность изменяются достаточно плавно, давая время на принятие решения и изменение состояния реактора извне.

На случай непредвиденного катастрофического развития цепной реакции, в каждом реакторе предусмотрено экстренное прекращение цепной реакции, осуществляемое сбрасыванием в активную зону специальных аварийных стержней или стержней безопасности — система аварийной защиты.

## Механизмы ядерных реакций

Характер взаимодействия налетающей частицы с ядром зависит от ее кинетической энергии, массы, заряда и др. характеристик. Он определяется теми степенями свободы ядра (ядер) которые возбуждаются в ходе столкновения. Различие между ядерными реакциями включает и их различную длительность.

Если налетающая частица лишь касается ядра-мишени, а длительность столкновения приблизительно равна времени, необходимому для прохождения налетающей частицей расстояния, равного радиусу ядра-мишени ( $\sim 10^{-22}$  с), то такие реакции относят к классу **прямых**. Общим для всех прямых ядерных реакций является селективное возбуждение небольшого числа определенных состояний (степеней свободы). В прямом процессе после первого столкновения налетающая частица имеет достаточную энергию, чтобы преодолеть ядерные силы притяжения в область действия которых она попала. Примерами прямого взаимодействия являются неупругое рассеяние нейтронов, реакции обмена зарядом.

Угловые распределения продуктов прямых ядерных реакций (зависимость вероятности вылета от угла, отсчитанного от направления пучка) позволяют определить квантовые числа селективно заселяемых состояний в каждой конкретной реакции, а величина сечения при заданной энергии — структуру этих состояний.

Если падающая частица не покидает область взаимодействия после первого столкновения, то она вовлекается в каскад последовательных столкновений, в результате которых ее начальная кинетическая энергия постепенно распределяется среди нуклонов ядра и возбужденными оказываются многие степени свободы, а состояние ядра постепенно усложняется. В процессе дальнейшей релаксации наступает статистическое равновесие и образуется составное ядро, время жизни которого  $\sim 10^{-14} \div 10^{-18}$  с. Распад составного ядра не зависит от способа его образования. Тип распада определяется энергией возбуждения, угловым моментом, четностью и изотопическим спином ядра. Энергетический спектр частиц, испускаемых в процессе девозбуждения составного ядра, характеризуется максвелловской формой и симметричным распределением «вперед — назад» относительно пучка (в системе центра инерции).

В случае распада средних и тяжелых составных ядер вероятность испускания нейтронов значительно превышает вероятность эмиссии заряженных частиц, вылету которых препятствует кулоновский барьер ядра. В тяжелых ядрах с испусканием нейтронов конкурируют процессы деления ядер и альфа-распада.

## 69 Нестационарная теория возмущений

### Нестационарная теория возмущений

Нестационарная теория возмущений применяется в случае, когда возмущения зависят от времени. В этом случае теория возмущений основывается на методе вариации постоянных, так же как и в классической механике. Задача состоит в решении уШ

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = (H_0 + U(t))\psi(t)$$

при условии, что в начальный момент система находилась в одном из стационарных состояний  $\psi_n^{(0)} \exp(-\frac{i}{\hbar} E_n^{(0)} t)$  невозмущенного гамильтониана  $H_0$ .

Решение ищется в виде ряда

$$\psi(t) = \sum_m C_{mn}(t) \psi_m^{(0)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_m^{(0)} t\right),$$

в котором зависимость коэффициентов от времени возникает только благодаря возмущению:

$$i\hbar \frac{dC_{mn}}{dt} = \sum_k U_{mk}(t) C_{kn}(t), \quad (69.1)$$

где  $U_{mk}$  – собственные значения функции возмущений,  $C_{mn}(-\infty) = \delta_{mn}$ .

Если возмущение содержит только одну гармонику ( $U(t) = V \exp(-i\omega t)$ ), вероятность перехода из состояния  $n$  при  $t = -\infty$  в  $m$  при  $t = \infty$  определяется выражением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} |C_{mn}(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \delta(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}).$$

Т.о., за бесконечный промежуток времени переход произойдет с сохранением энергии. Для вероятности перехода в единицу времени получим:

$$w_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \rho(E_n^{(0)}),$$

где  $\rho$  – плотность уровней энергии.

В квантовой теории поля  $C(t) \equiv S(t, -\infty)$ , т.е. является матрицей рассеяния. Уравнение (69.1) удобно записать в операторной форме:

$$i\hbar \dot{S}(t, -\infty) = U(t) S(t, -\infty).$$

Релятивистски инвариантное выражение для матрицы рассеяния можно воспроизвести в виде суммы диаграмм Фейнмана. Однако, уже во втором порядке по возмущениям в матрице рассеяния появляется расходимость. Для ее преодоления применяется процедура перенормировок.

## Золотое правило Ферми

В квантовой физике, золотое правило Ферми позволяет вычислить вероятность перехода между двумя состояниями квантовой системы, используя

нестационарную теорию возмущений. Хотя правило названо в честь Энрико Ферми, но большинство работы, приводящей к Золотому правилу было сделано Дираком.

Предположим, что система находится первоначально в состоянии  $|i\rangle$  с гамильтонианом  $H_0$ . Рассмотрим влияние независимого от времени гамильтониана возмущения  $H'$ .

Вероятность перехода из одного состояния в несколько состояний в единицу времени, например, из состояния  $|i\rangle$  в набор состояний  $|f\rangle$ , дается в первом порядке теории возмущений:

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \rho,$$

где  $\rho$  является плотностью конечных состояний, и  $\langle f | H' | i \rangle$  – матричный элемент (в бра-кет нотации) возмущения,  $H'$ , между конечным и начальным состояниями.

Золотое правило Ферми верно, когда  $H'$  независим от времени,  $|i\rangle$  – состояние невозмущенного гамильтониана, состояния  $|f\rangle$  формируют непрерывный спектр, и начальное состояние не было значительно обеднено (например, если рассеяние произошло в конечное состояние).

Самый общий способ получить уравнение состоит в том, чтобы воспользоваться нестационарной теорией возмущения и взять предел для поглощения согласно предположению, что время измерения является намного бóльшим, чем время, необходимое для перехода.

## Вторичное квантование

**Вторичное квантование** — метод описания многочастичных квантовомеханических систем. В особенности часто этот метод применяется для задач квантовой теории поля и в многочастичных задачах физики конденсированных сред. Суть метода вторичного квантования в том, что вместо волновых функций частиц в координатном или в импульсном представлении вводятся волновые функции в представлении чисел заполнения различных состояний одной частицы. Переходы между различными состояниями одной частицы

при этом описываются как уменьшение числа заполнения, соответствующего одной волновой функции, на единицу, и увеличение числа заполнения другого состояния на единицу. Достоинство метода вторичного квантования в том, что он позволяет единообразно описывать системы с различным числом частиц, как с конечным фиксированным (в задачах физики конденсированных сред), так и с переменным, потенциально бесконечным (в задачах квантовой теории поля), числом частиц.

Для частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна операторы, изменяющие числа заполнения состояний на единицу работают так же как операторы рождения и уничтожения в задаче об одномерном гармоническом осцилляторе:  $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$ ,  $[a_i, a_j] = 0$ , где квадратные скобки означают коммутатор, а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для фермионов используются другие операторы, которые удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям:

$$\{a_i, a_j^+\} = a_i a_j^+ + a_j^+ a_i = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = 0$$

## 70 Нуклон–нуклонное взаимодействие

### Система двух нуклонов. Дейтрон

**Нуклоны** в атомном ядре удерживаются **ядерными силами**, представляющими собой сильное взаимодействие.

Ядерные силы проявляются в парном взаимодействии нуклонов (дейтерий), взаимодействии свободных нуклонов с составными ядрами и ядер друг с другом, взаимодействии нуклонов внутри ядра.

**Свойства** ядерных сил:

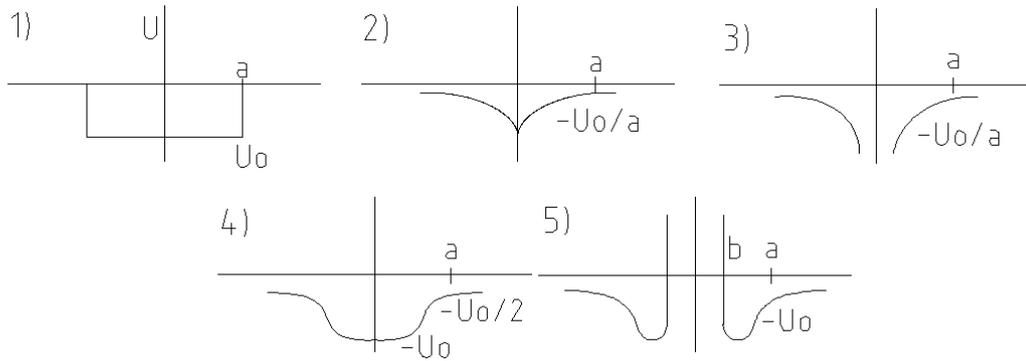
1. двухчастичное приближение: силы взаимодействия нуклонов не изменяются из-за присоединения других нуклонов,  $\hat{H} = \sum a < b \hat{H}_{ab}$ ;
2. эти силы потенциальные в хорошем приближении;

3. силы интенсивны;
4. силы короткодействующие;
5. на сверхмалых расстояниях хорошо работает **приближение центрального поля**;
6. ядерный потенциал обладает сингулярным поведением;
7. силы зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов;
8. силы нецентральные.

У **дейтерия** спин,  $I = 1$ , масса,  $M_D \equiv \mu \neq M_p + M_n$ . Волновая функция,  $\psi = \frac{1}{2}R(r)Y(\theta, \varphi)$ . Для оценки радиуса дейтерия необходимо решить уШ:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - U - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu^2} \right] R(r) = 0.$$

При  $l = 0$ ,  $R'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U]R = 0$ . Это уравнение было решено для разных потенциалов (графики потенциалов приведены на рисунке).



Виды соответствующих потенциалов

1.

$$U = \begin{cases} -U_0, & r \leq a \\ 0, & r > a; \end{cases} \quad a - \text{радиус дейтерия.}$$

2.

$$U(a) = -\frac{U_0}{l}, \quad U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

3. **Потенциал Юкавы:**

$$U(a) = -\frac{U_0}{a}, \quad U(r) = -\frac{U_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{\frac{r}{a}}.$$

#### 4. Потенциал Вуда–Саксона:

$$U(r) = -\frac{U_0}{1 + \exp(\frac{r-a}{\delta})}, \quad \delta \approx 0.55 \text{ фм.}$$

#### 5. Потенциал с непрерывной отталкивающей сердцевиной:

$$U(a) = -\frac{U_0}{a}, \quad U(r) = \begin{cases} -U_0 \exp(-\frac{r}{b}), & r > b \\ +\infty, & r < b. \end{cases}$$

Общим для всех потенциалов является малое значение  $a$  и большая величина  $U_0$ .

В случае прямоугольной ямы,  $R_D = \frac{1}{\gamma}$ , где  $\gamma = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu \Delta E}$ ,  $\Delta E = -E$ ,  $\psi = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{\exp(-\gamma^2)}{r}$ .

## Нуклон–нуклонное рассеяние

Можно выделить три группы исследований рассеяния нуклонов на нуклонах: в камере Вильсона; в фотопленке; в ионизационной камере.

Исследование распределения рассеянных нуклонов по углу,  $\theta$ , и энергии показало, что  $d\sigma/d\Omega \propto \cos \theta$ . Это справедливо, лишь если дебройлевская длина волны нуклона превосходит радиус нуклонных сил. Т.о., радиус действия ядерных сил оказывается равным  $R \approx 2$  фм.

## Спиновая зависимость. Тензорный характер ядерных сил

Опыты рассеяния медленных нейтронов на медленных атомах водорода показали, что сечения рассеяния различны для орто- и пара-атомов:  $\sigma_{\text{орто}} \sim 30\sigma_{\text{пара}}$  (у орто-атомов водорода спины коллинеарны, у пара-атомов — антиколлинеарны). Таким образом, для учета спиновой зависимости ядерных сил в оператор взаимодействия,  $\hat{U}$ , необходимо добавить слагаемое, зависящее от направлений спинов взаимодействующих ядер:

$$\hat{U} = \hat{V}_1(r) + \hat{V}_2(r) \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

Кроме того, ядерные силы являются нецентрированными, т.е. они зависят не только от взаимной ориентации спинов, но и от их ориентации относительно прямой, соединяющей нуклоны (об этом говорит, например, то, что  $M_D \neq M_p + M_n$ ). Т.о., ядерные силы являются **тензорными**.

Для учета тензорного характера ядерных сил к оператору  $\hat{H}$  необходимо добавить третье слагаемое с множителем  $(\vec{S}_1 \vec{n}) \cdot (\vec{S}_2 \vec{n})$ , где  $\vec{n}$  – единичный орт, проведенный от первого ядра ко второму:

$$\hat{H} = \hat{V}_1(r) + \hat{V}_2(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2) + \hat{V}_3(\vec{S}_1 \vec{n})(\vec{S}_2 \vec{n}).$$

## Зарядовая независимость ядерных сил

**Зарядовая симметрия** — равенство ядерных сил, действующих в протон-протонных и нейтрон-нейтронных взаимодействиях (об этом говорит равенство сечений рассеяния протонов на протонах и нейтронов на нейтронах).

**Зарядовая независимость** — равенство сил, действующих между протонами и нейтронами (более общий случай зарядовой симметрии).

## Изоспин

Нуклону приписывается квантовое число  $T = 1/2$  — **изоспин**. Состояния протонов и нейтронов отличаются проекцией изоспина,  $T_z$ : у протона она считается положительной, а у нейтрона — отрицательной. Волновая функция нуклона,  $\psi = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\psi_p + b\psi_n$ .

**Барионный заряд**,  $B = 1$ . Электрический заряд,  $q = e(T_z + B/2)$ .

Рассмотрим систему двух нуклонов,  $N'$  и  $N''$  с изоспинами  $T'$  и  $T''$ . Введем оператор *полного изоспина*:  $T = T' + T''$ . Полный изоспин может принимать значения 0 (изосинглетное состояние) и 1 (изотриплетное состояние). Т.к.  $T_z = T'_z + T''_z$ , у систем  $p - p$   $T_z = 1$ ,  $n - n$  —  $T_z = -1$ ,  $p - n$  —  $T_z = 0$ . Следовательно, дейтерий может находиться и в изосинглетном, и в изотриплетном состояниях.

Согласно **обобщенному принципу Паули**,  $\psi$  системы нуклонов антисимметрична относительно перестановки любых их пар,  $\Rightarrow$  изотриплетному

состоянию соответствует антисимметричная, а изосинглетному — симметричная волновая функция. Т.о., получили **принцип изоспиновой инвариантности**: *взаимодействия в системах  $p - p$ ,  $n - n$  и  $p - n$  одинаковы для одинаковых изоспиновых состояний.*

## Обменный характер ядерных сил. Мезонная теория

Для большинства ядер энергия связи,  $E_{св} \propto A$  ( $A$  — количество нуклонов в ядре),  $V \propto A$ . Двухчастичное приближение и учет тензорных сил не способны объяснить такое поведение спиновых сил. Для их объяснения необходимо ввести взаимодействие, препятствующее чрезмерному сближению частиц, т.е. допустить, что ядерные силы обладают свойством насыщения. Любой нуклон притягивает небольшое число соседей и отталкивает остальные частицы. Соответствующие силы назвали **обменными**. Необменные силы были названы **силами Вигнера**.

Из обменных сил выделяют: **силы Майорана** (перестановка координат нуклонов), **силы Барлетта** (перестановка спинов) и силы **Гайзенберга** (перестановка как координат, так и спинов).

Первой теорией обменных сил является **мезонная теория**. Согласно гипотезе Юкавы, ядерное взаимодействие — результат обмена нуклонов виртуальными мезонами (квантами сильного поля). В последствии в космическом излучении были обнаружены  **$\pi$ -мезоны** (пионы).

У пиона  $T = 1$ ,  $T_z = 0, \pm 1$  (соответственно, выделяют  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  и  $\pi^-$  пионы). Истинно нейтральной является  $\pi^0$ -мезон,  $\pi^+$  или  $\pi^-$ -мезоны — античастицы. Спин пионов равен нулю, четность отрицательна. Масса пиона,  $m_\pi \approx 270m_e$ . Пионы являются нестабильными частицами, периоды полураспада составляют  $\sim 10^{-8}$  с для  $\pi^\pm$ -мезонов и  $\sim 10^{-16}$  с для  $\pi^0$ -мезонов.

Возможны следующие виды реакций:



Мезонная теория предсказала ряд фактов:

- существование пионов;

- характеристики пионов;
- большую величину сечения рассеяния пионов на нуклонах;
- многообразии взаимных превращений частиц с участием пионов;
- фоторождение пионов:  $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ .

## Модели ядер. Обоснование оболочечной модели

Три вида ядерных моделей:

- **коллективные**: ядерная материя, капельная теория, несферическая модель;
- **обобщенные**: ферми-газ, оболочечные модели (по аналогии с оболочечной моделью атома);
- **одночастичные**: обобщение сильного и слабого взаимодействий, обобщения парных корреляций.

Из моделей можно получить **полуэмпирическую формулу Бейцеккера**:

$$E = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} - \alpha_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \alpha_5 A^{-3/4} \delta(A - 2Z) + \Delta m c^2.$$

Член с  $\alpha_1$  соответствует постоянству удельной энергии связи, с  $\alpha_2$  – поверхностной энергии, с  $\alpha_3$  – кулоновской энергии, с  $\alpha_4$  – эффекту симметрии, с  $\alpha_5$  – эффекту спаривания;  $\Delta m c^2$  – **дефект массы** ядра.

В пользу модели ядерных оболочек говорит существование **«магических чисел»** – стабильность ядер с количеством нейтронов,  $N$ , или протонов,  $Z$ , равным 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, а также особая стабильность «дважды магических» ядер ( $N = Z$  и оба равны одному из магических чисел).

Было предположено, что нуклоны в ядре квазинеzáвисимы и движутся в усредненном поле, обладающем центральной симметрией. Их движение подчиняется законам квантовой механики. Оболочки заполняются в соответствии с принципом Паули, что и дает значения магических чисел (полностью заполненные оболочки).

Кроме того, эта модель описывает спины, четности и магнитные моменты ядер, в которых имеется один нуклон сверх заполненных оболочек или недостает одного нуклона. Но для других ядер предсказания оболочечной модели неоднозначны.

Основной недостаток данной модели: она не может объяснить большие квадрупольные моменты некоторых ядер (что устраняется в обобщенных моделях).

## Одночастичные состояния. Деформация ядер

В одночастичных моделях предполагается, что нуклоны движутся в самосогласованном поле остальных нуклонов, либо же (модель ферми–газа) вообще не взаимодействуют друг с другом.

Говоря о форме ядра, прежде всего имеют в виду форму его самосогласованного поля. Т.к.  $Q_0 \neq 0$ , то форма несферическая (подобна эллипсоиду вращения).

**Параметр деформации:**  $\beta = \Delta R/R$ , где  $R$  – размер полуоси симметрии,  $\Delta R$  – разность между большой и малой полуосями симметрии. Если заряд в ядре распределен равномерно, то  $Q_0 = \frac{4}{5}ZR^2\beta$ .

Еще одним доказательством несферичности ядер является их «вращение»: существование вращательных полос в энергетических спектрах ядер,  $E_I = \frac{\hbar^2}{2J}I(I+1)$ .

Из соображений симметрии следует, что четности всех вращательных состояний положительны, а спин  $I^n = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$

## Обобщенная модель

Обобщенные модели исходят из обобщения коллективных и одиночных моделей. Ядро — сгусток вещества, окруженный несколькими внешними нейтронами. Поведение ядерного остова определяется одной из коллективных моделей, а поведение внешних нуклонов — самосогласованным полем.

1. *Обобщенная модель со слабым взаимодействием.* Ядро имеет сплошной сферический четно–четный состав, определенный капельной моделью, оставшиеся нейтроны совершают независимые движения в поле остова. Слабое взаимодействие коллективных и одночастичных степеней свободы.
2. *Обобщенная модель с сильным взаимодействием.* Ядро имеет остов, образуемый нуклонами *заполненных* оболочек, внешние нуклоны интенсивно взаимодействуют с остовом. Эти нуклоны могут вызывать колебания остова и его деформацию.
3. *Обобщенная модель парных корреляций.* Эта модель учитывает остаточное взаимодействие внешних нуклонов (по типу оболочечной модели с парными корреляциями). Данная модель является наиболее современной.

## 71 Частицы и взаимодействия

### Фундаментальные взаимодействия. Постоянные и радиусы взаимодействий

Все виды взаимодействий считаются обусловленными соответствующими частицами (реальными или виртуальными):  $\pi$ -мезонами, фотонами, электронами и нейтрино (позитронами и антинейтрино), гравитонами. Конечная скорость обменных частиц обуславливает ненулевое время всех взаимодействий и их инерционность.

**Сильное взаимодействие** Этот вид взаимодействия обеспечивает ядерные силы, удерживающие нуклоны в ядре. Т.к. данное взаимодействие наиболее интенсивно, будем считать условно, что его интенсивность,  $I = 1$ . Радиус взаимодействия,  $R \sim 10^{-15}$  м, характерное время,  $\tau \sim 10^{-23}$  с. **Характерным временем** называется минимальное время жизни частиц, подвергающихся распаду за счет данного типа взаимодействия, или же отношение

характерного радиуса взаимодействия к скорости ( $c$ ).

Более точно интенсивность сильного взаимодействия в ядре определяется формулой  $I = \frac{g^2}{\hbar c}$ , где  $g$  – мезонный заряд взаимодействующих частиц.

Сильное взаимодействие обеспечивается виртуальными  $\pi$ -мезонами (пионами).

При данном виде взаимодействия выполняются *законы сохранения*: заряда, барионного заряда, энергии, импульса, спина, изоспина и его проекции, странности и четности.

**Электромагнитное взаимодействие** Данное взаимодействие происходит между заряженными частицами. Интенсивность,  $I = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ , характерное время,  $\tau \sim 10^{-20}$  с, радиус взаимодействия,  $R = \infty$ . Взаимодействие обеспечивается виртуальными и реальными фотонами.

При данном взаимодействии выполняются все законы сохранения, кроме сохранения изоспина, в результате чего возникает различие между массами частиц с равными проекциями изоспина.

**Слабое взаимодействие** Данный вид взаимодействия наблюдается при  $\beta$ -распаде. Интенсивность,  $I = \frac{f^2}{\hbar c} \sim 10^{-12}$  ( $f$  – лептонный заряд), радиус,  $R \sim 10^{-18}$  м, время,  $\tau \sim 10^{-13}$  с. Носителями взаимодействия являются промежуточные бозоны.

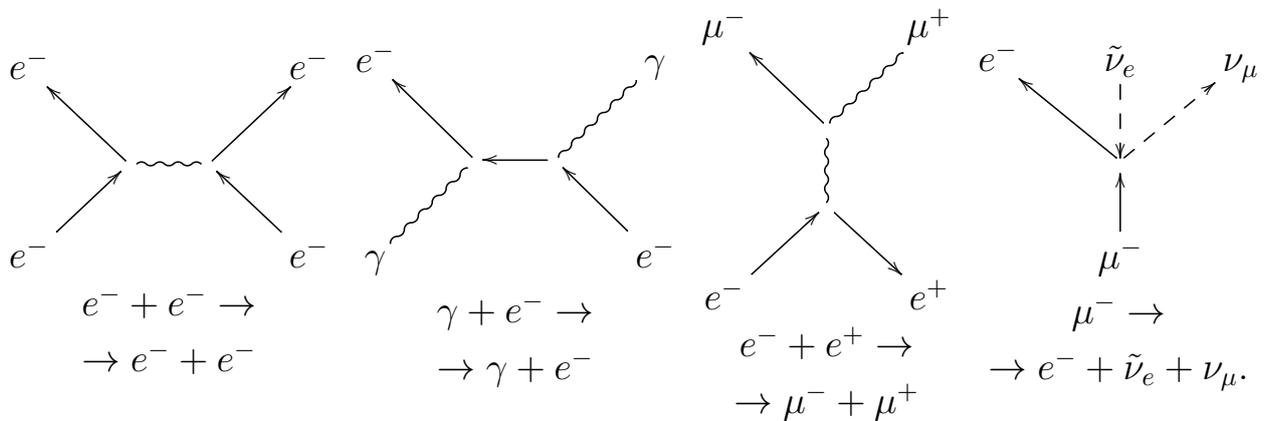
При слабом взаимодействии не выполняются законы сохранения изоспина и его проекции, странности и четности.

**Сверхслабое (гравитационное) взаимодействие** Существует между всеми частицами. Интенсивность,  $I \sim 10^{-38}$ , радиус,  $R = \infty$ , время неизвестно. Носителями взаимодействия являются гипотетические частицы — **гравитоны**, имеющие спин,  $s = 2$ , и нулевой магнитный момент. Естественно, что столь малая интенсивность данного вида взаимодействия не играет никакой роли в микромире. Т.о., можно сказать, что сверхслабое взаимодействие

существенно только в макро- и мегамире.

## Диаграммы Фейнмана

Любой процесс взаимодействия можно представить как последовательность элементарных актов, например, испускание или поглощение виртуальной частицы.



**Правило Фейнмана:** при выбранном положительном направлении оси времени графики, имеющие то же направление, отвечают движению частицы,  $Q$ , а направленные противоположно — движению античастицы,  $\tilde{Q}$ . Т.к. фотон тождественен антифотону, он не снабжается стрелкой, обозначаясь волнистой линией.

Любой процесс, т.о., допускает простое наглядное графическое представление при помощи **диаграмм Фейнмана**. На них линии со свободным концом обозначают реальные начальные и конечные частицы, а все внутренние линии — виртуальные или промежуточные частицы. Будем считать, что ось времени направлена снизу вверх. Тогда, получим примеры диаграмм для электромагнитного и слабого взаимодействия.

## Основные характеристики частиц. Квантовые числа

Характеристики частиц делятся на две группы: **геометрические**, связанные со свойством пространства-времени, и **внутренние**, отражающие сим-

метрию фундаментальных взаимодействий.

### Геометрические характеристики.

**Масса,  $m$ .** Чисто динамическая характеристика. Не может служить основным классификационным признаком (хотя на заре развития квантовой механики частицы делили по массе на лептоны, мезоны и барионы).

**Спин,  $I$ .** Собственный момент импульса частицы. Его значение однозначно определяет тип статистики для описания поведения частицы, а также вид ее волновой функции.

**Пространственная четность,  $\eta_P$ .** Определяет поведение волновой функции частицы относительно пространственной инверсии. Саму частицу характеризует **внутренняя** пространственная четность,  $\eta_0$  (без влияния момента импульса).

### Внутренние характеристики.

**Электрический заряд,  $q$ .** В единицах  $e$ .

**Магнитный момент,  $\mu$ .** Характеризует взаимодействие частицы с внешним ЭМП.  $\mu$  связан со спином,  $I$ , и существует лишь при  $I \geq 1/2$ . Имеет динамическое происхождение.

**Лептонный заряд,  $L$ .**  $L = 1$  у лептонов,  $L = -1$  у антилептонов и  $L = 0$  у прочих частиц. Полный лептонный заряд складывается из электронного, мюонного и тауонного зарядов:  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ .

**Барионный заряд,  $B$ .** Вводится аналогично лептонному заряду. Также является аддитивной величиной. Барионный заряд атомных ядер называют **массовым числом,  $A$** .

**Изоспин,  $T$ .** Приписывается изомультиплету и определяет число его членов,  $N = 2T + 1$ .

**Проекция изоспина,  $T_z$ .** Различна для членов мультиплета. Электрический заряд барионов,  $q = T_z + \frac{1}{2}B$ .

**Странность,  $S$ .** Вводится, чтобы электрические заряды «странных» частиц удовлетворяли обобщенному соотношению:  $q = T_z + \frac{1}{2}(B + S)$ .  $S = 0$  у обычных частиц,  $S = 1$  у К-мезонов,  $S = -1$  у  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гиперонов,  $S = -2$  у каскадного  $\Xi$ -гиперона,  $S = -3$  у  $\Omega$ -гиперона.

**Гиперзаряд,  $Y$ .**  $Y = B + S$ ,  $\Rightarrow q = T_z + \frac{1}{2}Y$ . Тогда, т.к.  $\langle T_z \rangle = 0$ , то  $Y = 2\langle q \rangle$ . Гиперзаряд является более удобной величиной, чем странность.

**Очарование,  $C$ .** Введена после открытия «очаровательных» частиц.  $q = T_z + \frac{1}{2}(B + S + C)$ .

**Зарядовая четность,  $\eta_c$ .** Определяет поведение волновой функции при операции зарядового сопряжения,  $\hat{C}$ , переводящей волновую функцию частицы в  $\psi$  античастицы:  $\hat{C}\psi = \eta_c\psi$ ,  $\eta_c^2 = 1$ ,  $\Rightarrow \eta_c = \pm 1$ . Зарядовой четностью обладают только **истинно нейтральные** частицы, тождественные своим античастицам.

**Среднее время жизни,  $\tau$ .**

## Законы сохранения

**Универсальные законы сохранения:** четырехимпульса (однородность четырехмерного пространства Минковского), момента импульса (изотропность пространства) и заряда, помимо электрического, еще и  $B$ , и  $L$ , (инвариантность калибровочных преобразований).

В сильном взаимодействии сохраняется странность (гиперзаряд) и изоспин (в связи с изоспиновой симметрией).

Электромагнитное взаимодействие не столь симметричное, в нем не сохраняется изоспин (однако, сохраняется его проекция).

Слабое взаимодействие наименее симметрично. В нем не сохраняются четность, изоспин и его проекция, спин.

Допустим, теперь, что наблюдается реакция  $a + b \rightarrow c + d$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — некоторые частицы. Если данная реакция протекает, то сохраняются все законы, соответствующие данному взаимодействию (и обратно, с поправкой на особенности слабого и сверхслабого взаимодействий). Неизменности законов сохранения будут соответствовать, в данном случае, и производные реакции, в которых частица с одной стороны отношения будет перенесена в другую, с заменой на соответствующую античастицу. Так, например, реакция комптоновского рассеяния кванта на электроны,  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ , может быть превращена в реакцию аннигиляции электрона и позитрона:  $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$ .

## Классификация частиц

Частицы классифицируются по следующим признакам:

- по отношению к слабому взаимодействию: **адроны** (участвуют) и **адроны** (не участвуют);
- по времени жизни: **стабильные** и **резонансные**;
- по спину: **фермионы** и **бозоны**;
- по характеру сильного взаимодействия: **изомультиплеты**;
- в соответствии с набором квантовых чисел: **частицы**;
- любой частице сопоставляется **античастица**.

Элементарные частицы делят на **адроны** и **фундаментальные**. Адроны рассматриваются в качестве составных частиц, а фундаментальные являются истинно элементарными. Фундаментальные частицы: **кванты** ( $\gamma$ -квант ЭМП и  $G$ -квант гравитационного поля) и **лептоны** (Е-лептоны:  $e^-$  и  $\nu_e$ ; М-лептоны:  $\mu^+$  и  $\mu_e$ ; Т-лептоны:  $\tau^-$  и  $\nu_\tau$ ). Адроны делятся на **стабильные** и **резонансы**. Стабильные адроны: **мезоны** ( $\pi$ ,  $\eta$ ,  $k$ ,  $D$  в разновидностях  $^+$ ,  $^0$  и  $^-$ ) и **барионы** (N-нуклон: протон,  $p$ , и нейтрон,  $n$ ;  $\Lambda^-$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Omega^-$ ,  $\Lambda_C^-$  гипероны). Резонансы: **мезонные** ( $\rho$ ,  $\omega$  и  $K$ ) и **барионные** ( $\Delta$ ,  $\Sigma^*$  и  $\Xi^*$ ). Резонансы имеют наименьшее время жизни ( $\sim 10^{-22} \div 10^{-23}$  с), чем больше масса резонанса, тем больше для него число возможных каналов распада. Время жизни стабильных адронов превышает (у некоторых — незначительно) характерное

время сильного взаимодействия.

Современная физика предполагает, что все адроны состоят из фундаментальных частиц — **кварков**, носящих дробный заряд ( $q = -1/3, 0, 1/3 e$ ) и обладающих всеми характеристиками адронов и некоторыми дополнительными характеристиками (цвет, запах, странность, очарование, красота). Комбинации кварков и **глюонов**, посредством которых осуществляется межкварковое взаимодействие, образуют более тяжелые комплексы — адроны.

Согласно уравнениям Дирака, кроме состояний с положительной энергией могут существовать состояния с энергией отрицательной. **Вакуум** — состояние, в котором все уровни  $E < 0$  заселены электронами, а уровни  $E \geq 0$  свободны. Если электрону с  $E < 0$  сообщить энергию  $E \geq 2m_e c^2$ , он перейдет в состояние с положительной энергией и будет вести себя как электрон с положительным зарядом — позитрон (антиэлектрон).

При встрече частицы с античастицей происходит аннигиляция с выбросом свободной энергии. Каждая частица имеет соответствующую античастицу.

В сильных ЭМП из вакуума под действием  $\gamma$ -квантов могут рождаться пары электрон–позитрон. Аналогично, при аннигиляции электрона и позитрона происходит выброс  $\gamma$ -кванта.

## Единый принцип взаимодействий

Схожесть свойств лептонов заставила задуматься о том, не являются ли они проявлением одних и тех же частиц. Это обстоятельство положило начало **теории электрослабого взаимодействия**: пары лептон – соответствующее ему нейтрино рассматриваются как дублетные представления одних и тех же частиц, различающиеся между собой лишь значением **слабого изоспина**. Объединение слабого и электромагнитного взаимодействий возможно при энергиях, превышающих массу промежуточного W-бозона ( $\sim 80$  ГэВ) — кванта электрослабого поля. Еще одним подтверждением теории электрослабого взаимодействия является осцилляция нейтрино (за промежуток времени от рождения и до взаимодействия с какой-либо частицей нейтрино может изменить свой тип), т.е. взаимное превращение  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\tau \rightleftharpoons \nu_\mu$ .

Помимо лептонов и кварков (фермионов), к истинно фундаментальным частицам относятся калибровочные бозоны (глюоны, фотоны, промежуточные бозоны) — кванты взаимодействий. Кроме того, к этой группе следует отнести гравитон.

Теория, сводящая все виды взаимодействия к одному, и представляющая все частицы спинорными разновидностями единой квантовой системы (или линейной комбинации основных квантовых систем), называется **теорией Великого объединения**. Экспериментальное подтверждение данной теории в лабораторных условиях невозможно ввиду чрезвычайно высоких уровней энергии, при которых исчезает различие между видами взаимодействий.

Возможно, что существование различных внутренних квантовых чисел у элементарных частиц означает более сложную геометрию микромира, отвечающую большему числу измерений, чем макроскопическая геометрия. Эти идеи отражены в **теории суперструн**, являющихся аналогами струн, протянутых в многомерном ( $\sim 10$ ) пространстве. Тогда элементарные частицы являются специфическими возбуждениями суперструн. Считается, что «лишние» измерения не обнаруживают себя в силу компактификации, т.е. образования замкнутых подпространств с характерными размерами  $\sim 10^{-35}$  м. Пока теория суперструн, равно как и различные варианты теории Великого объединения, остаются не подкрепленными экспериментальными данными.

Физика элементарных частиц сложна еще и тем, что свойства пространства–времени на сверхмалых расстояниях ( $\sim 10^{-35}$  м) невозможно предсказать. Здесь проявляется квантовый характер пространства–времени (не определено, возможно ли существование областей с размерами, меньшими кванту пространства–времени — фундаментальной длины). Кроме того, на таких расстояниях возможна флуктуация метрики за счет квантовых гравитационных эффектов. Таким образом, для построения теории Великого объединения скорее всего, необходимо исследовать взаимодействие сверхмалых частиц, имеющих значительные массы, на расстояниях поря фундаментальной длины, когда интенсивность гравитационного взаимодействия становится сравнима с интенсивностью сильного взаимодействия.

## Электромагнитное взаимодействие

Электромагнитное взаимодействие — одно из четырех **фундаментальных взаимодействий**. Электромагнитное взаимодействие существует между частицами, обладающими электрическим зарядом, а также между электрически нейтральными составными частицами, части которых обладают зарядом. Например, нейтрон — нейтральная частица, однако он содержит в своем составе заряженные кварки и потому участвует в электромагнитном взаимодействии (в частности, обладает ненулевым магнитным моментом).

Из фундаментальных частиц в электромагнитном взаимодействии участвуют кварки, электрон, мюон и тауон, а также заряженные калибровочные  $W^\pm$  бозоны. С точки зрения квантовой теории поля электромагнитное взаимодействие переносится безмассовым бозоном — **фотоном**.

Электромагнитное взаимодействие отличается от слабого и сильного взаимодействия своим дальнедействующим характером — сила взаимодействия между двумя зарядами спадает только как вторая степень расстояния. По такому же закону спадает с расстоянием гравитационное взаимодействие. Электромагнитное взаимодействие заряженных частиц намного сильнее гравитационного, и единственная причина, по которой электромагнитное взаимодействие не проявляется с большой силой на космических масштабах — электрическая нейтральность материи, то есть наличие в каждой области Вселенной с высокой степенью точности равных количеств положительных и отрицательных зарядов.

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует **сила Ампера**:  $\vec{F}_A = I \cdot [\Delta \vec{l} \times \vec{B}]$ . На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует **сила Лоренца**:  $\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$ .

## 72 Сильные и слабые взаимодействия

### Классификация адронов

Количество адронов достигает нескольких сотен, подавляющее большинство из них — резонансы. У адронов обнаружена электромагнитная структура. Это вынудило искать руководящие принципы, упорядочивающие классификацию адронов.

Основные адроны:

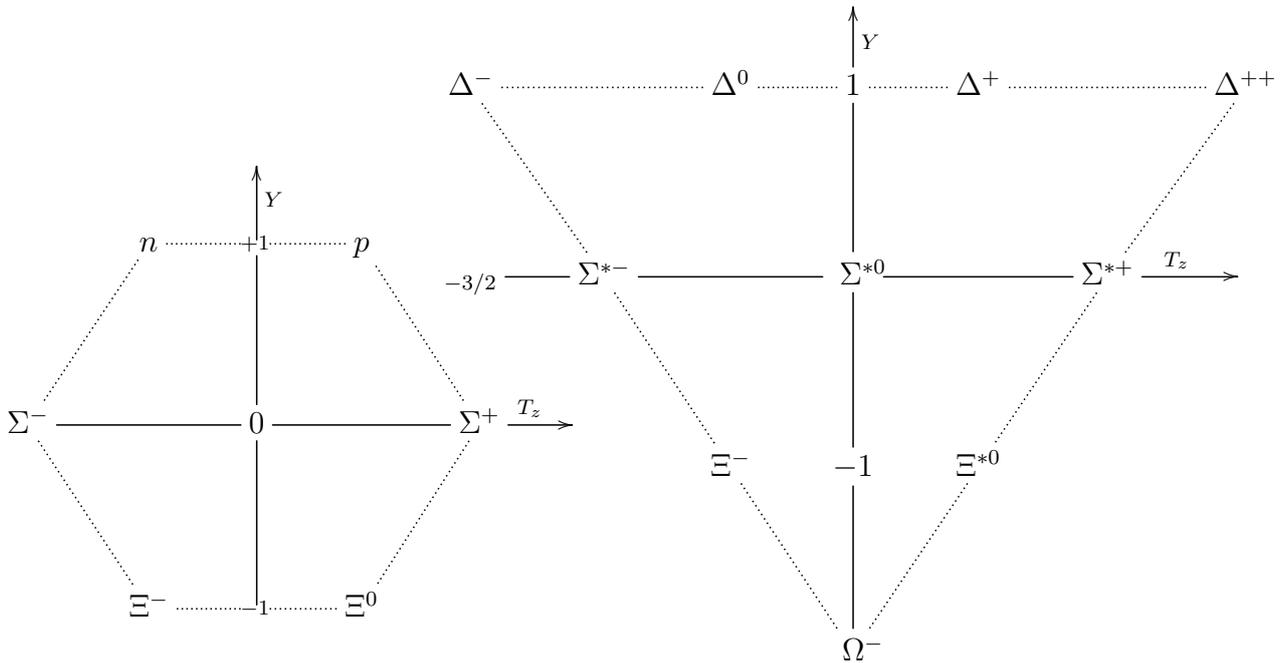
- нуклоны,  $S = 0, T = 3/2$ ;
- $\Delta$ -гиперон,  $S = 0, T = 3/2$ ;
- $\Lambda$ -гиперон,  $S = -1, T = 0$ ;
- $\Sigma$ -гиперон,  $S = -1, T = 1$ ;
- $\Xi$ -гиперон,  $S = -2, T = 1/2$ ;
- $\Omega$ -гиперон,  $S = -3, T = 0$ .

Мезоны ( $\pi, \eta, k, D$ ) имеют несколько меньшую, по сравнению с гиперонами, массу.

### Супермультиплеты. Кварки

Если на плоскости  $T_z - S(Y)$  разместить адроны в виде точек, проявятся симметричные группы — **супермультиплеты** размерностью 1, 8 и 10. Такие диаграммы называют **весовыми**.

Для объяснения супермультипликативности адронов были предложены новые фундаментальные частицы: **кварки**. Вначале ввели три кварка:  $u$  — верхний ( $Y = 1/3, T = 1/2$ ),  $d$  — нижний ( $Y = 1/3, T = -1/2$ ) и  $s$  — странный ( $Y = -2/3, T = 0, S = 1$ ). Спин кварков,  $I = 1/2$ , четность,  $\eta_p = +1$ , бозонный заряд,  $B = 1/3$ , для всех кварков. Например, нейтрон состоит из одного  $u$ - и двух  $d$ -кварков:  $n = udd$ ;  $p = uud$ ,  $\Lambda^0 = uds$  и т.д. Однако, три таких кварка не позволили объяснить состояния с одинаковыми спинами, например,  $\Omega^- = sss$ , поэтому ввели понятие **цвета**:  $R, G, B$ . Антикварки, соответственно, обладают антицветами:  $\tilde{R}, \tilde{G}$  и  $\tilde{B}$ . Кроме цвета



Весовые диаграммы

ввели ограничение: т.к. все адроны — белые, составляющие их кварки должны в сумме давать «белый» цвет (т.е.  $R+G+B$  или кварк + антикварк). Сами кварки стали рассматриваться как одна и та же частица с разным значением квантового числа **аромата**.

В последствии выяснилось, что трех кварков «не хватает»: был введен четвертый кварк:  $c$  — очарование ( $I = 1/2$ ,  $\eta_p = 1$ ,  $B = 1/3$ ,  $T = 0$ ,  $S = 0$ ,  $C = 1$ ,  $Y = B + S + C = 4/3$ ). Затем ввели кварк  $b$  — красота с новым квантовым числом,  $b = 1$ ,  $Y = B + S + C - b = -2/3$ . Далее последовал кварк  $t$  — правда с новым квантовым числом,  $t = 1$ . В свободном виде кварки не наблюдались.

Для объяснения межкваркового взаимодействия были введены частицы — **глюоны**, передающие цвет от кварка к кварку.

Итак, согласно кварковой теории, барионы состоят из трех кварков, мезоны — из кварка и антикварка. В свою очередь, кварки «конструируют» из других частиц (например, хромоны:  $R$ ,  $G$  и  $B$ ; флэйвоны:  $\alpha$  и  $\chi$ ; фамилоны:  $f_I$ ,  $f_{II}$ ,  $f_{III}$  и пр.). Несмотря на чисто гипотетический характер, кварковая

теория позволила предсказывать новые, впоследствии обнаруженные, элементарные частицы.

Частицы, с очарованием ( $C$ ), отличным от нуля, называются *очарованными*. Очарование подобно странности сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не сохраняется при слабых. Распады очарованных адронов происходит за счет слабого взаимодействия. При этом очарование меняется на единицу. Однако, в некоторых случаях при распадах частиц с  $C = 0$  могут возникать очарованные частицы. В этом случае частицы-прообразы называют частицами со скрытым очарованием (например,  $J/\psi$ -мезон, состоящий из кварка  $c$  и антикварка  $\bar{c}$ ). По своей структуре квантовая система  $c\bar{c}$  (*чармоний*) напоминает атом водорода, однако, в отличие от последнего, ее различные возбужденные состояния условились считать различными частицами.

Веским аргументом в пользу кварковой модели адронов явились опыты по прямому просвечиванию адронов высокоэнергетическими электронами. Происходящий при этом процесс (*глубоко неупругое рассеяние*) показал, что внутри адронов электроны рассеиваются на частицах с зарядами  $+2/3$  и  $-1/3$  и полуцелым спином. О конечных размерах кварков эти опыты ничего не говорят. Однако, возможно, что и кварки не являются истинно элементарными частицами. «Заключение» кварков внутри адронов (т.е. отсутствие возможности существования отдельных свободных кварков) подтверждает эту теорию, т.к. согласно современной квантовой теории, при получении дополнительной энергии кварк преобразуется в систему кварк–антикварк, т.е. в новый мезон. Еще одной теорией неосуществимости получения свободных кварков является теория, согласно которой межкварковые взаимодействия являются дальнодействующими, т.е. для отделения их друг от друга требуются сверхбольшие (в идеале — бесконечные) энергии (чему, отчасти, соответствует гипотеза существования кварковых звезд). До сих пор единственной лабораторией, позволяющей исследовать взаимодействия частиц при сверхвысоких энергиях является окружающий нас макрокосмос, и поэтому проблемы наблюдения сильно удаленных объектов все еще не позволяют нам

скольнибудь конкретно доказать или опровергнуть теории квантовой хромодинамики и других теорий сверхинтенсивных взаимодействий.

## Лептоны

Все лептоны являются фермионами, т.е. обладают полуцелым спином. Лептонам приписывается лептонный заряд,  $L = 1$ , антилептонам —  $L = -1$ . Полный лептонный заряд складывается из частичных:  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ . Лептоны разделяют на три дублета: электронный (электрон, позитрон, электронные нейтрино и антинейтрино), мюонный и таонный. Взаимное превращение лептонов осуществляется под воздействием слабого взаимодействия. Так, например,  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \nu_\mu$ ,  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e$ .

## Слабые и электрослабые взаимодействия

**Промежуточные бозоны.** Согласно теории электрослабого взаимодействия, электромагнитное и слабое взаимодействия являются частями одного целого взаимодействия. Переносчиками этого вида взаимодействия являются **промежуточные бозоны**. До своего открытия промежуточные бозоны были предсказаны экспериментально. Каждый промежуточный бозон может распадаться на лептон и соответствующее нейтрино, например,  $W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$  или  $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ . Являясь переносчиками электрослабого взаимодействия, промежуточные бозоны участвуют, например, и в  $\beta$ -распаде:  $n \rightarrow p + W^- \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ .

**Законы сохранения.** Т.к. слабое взаимодействие является сильно несимметричным, при нем выполняются только универсальные законы сохранения: четырехимпульса, момента импульса, заряда (в т.ч. барионного и лептонного зарядов). При этом выполняется ограничение на суммарное изменение спина:  $|\Delta S| \leq 1$ .

Воспользовавшись законами сохранения, можно, например, определить каналы распада мюона:

1. т.к.  $\mu^-$  — лептон, он распадается под воздействием слабого взаимодействия;
2. закон сохранения заряда:  $\mu^- \rightarrow e^- + \dots$ ;
3. закон сохранения электронного лептонного заряда:  $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \dots$ ;
4. закон сохранения мюонного лептонного заряда:  $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$ ;
5. законы сохранения не запрещают и такие каналы, как:  $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma$ ,  $\mu^- \rightarrow \tilde{e}^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu + e^- + e^+$ , однако, согласно правилу «алгебры реакций», наибольшую вероятность будет иметь реакция с наименьшим числом частиц.

**Взаимодействие нейтрино с веществом.** Нейтрино были «изобретены» для того, чтобы удовлетворить законам сохранения при  $\beta$ -распаде. Затем они были обнаружены с помощью реакций К-захвата,  $\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+$ , в сцинтилляторе с раствором  $CdCl$  в воде.

Нейтрино обладают **спиральностью**,  $\vec{s} \cdot \vec{p}$ , где  $\vec{p}$  — импульс. Спиральность позволила предположить, что если нейтрино — частицы с нулевой массой, спиральность является их внутренним свойством, однако, если масса нейтрино ненулевая, в разных СК спиральность должна быть разная. Проведенные опыты позволили определить массу нейтрино, составившую у  $\nu_e$  около 30 эВ.

Спиральность нейтрино правовинтовая, у антинейтрино — левовинтовая. Из-за крайне малого сечения реакций взаимодействия нейтрино с веществом требуются установки с огромным количеством реагента для обнаружения одного–двух нейтрино в час. Нейтринные телескопы представляют собой камеры, заполненные реагентом (например, хлоридом кадмия), и расположенные глубоко под землей для исключения влияния космических частиц. Камера окружена сцинтилляционными счетчиками, регистрирующими возникающие в результате К-захвата частицы. Помимо электронных нейтрино,  $\nu_e$ , были открыты таонное,  $\mu_\tau$ , и мюонное,  $\nu_\mu$ . Опыты показали, что нейтрино — проявления одной и той же частицы (за время своей жизни нейтрино осциллирует, т.е. испущенное в результате реакции мюонное нейтрино через некоторое время становится мюонным, затем, например, таонным и т.д.).

**Электрослабое взаимодействие.** Общие черты электромагнитного и слабого взаимодействия:

- ЭМ взаимодействие осуществляется посредством фотонов, слабое — посредством промежуточных бозонов;
- ЭМ ток является четырехвектором, так же как и слабый ток (поток комплексов  $e^- \nu_e, \mu \nu_\mu, \tau \nu_\tau$ );
- ЭМ и слабое взаимодействия универсальны, их интенсивность полностью определяется электрическим и лептонным зарядами.

Различия данных взаимодействий:

- радиус ЭМ взаимодействия,  $R = \infty$ , у слабого взаимодействия  $R \sim 10^{-18}$  м,  $m_\gamma = 0$ ,  $m_{\text{бозона}} > 0$ ;
- из-за большой массы бозонов к слабым взаимодействиям невозможно применить теорию возмущений;
- ЭМ взаимодействие сохраняет все квантовые числа, кроме  $T$ , слабое не сохраняет даже четность.

Однако, с точки зрения квантовой физики, различия взаимодействий проявляются в большей степени лишь на больших расстояниях, на расстояниях порядка характерного размера адрона и меньше данные взаимодействия проявляют себя одинаково. Наиболее успешной теорией электрослабого взаимодействия является теория **Вейнберга** и **Салама**. Переносчиками электрослабого взаимодействия являются промежуточные бозоны:  $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z^0$ .

## 73 Нуклеосинтез

**Нуклеосинтез во Вселенной. Ядерные реакции в звездах**

**Нуклеосинтез** — процесс синтеза ядер химических элементов тяжелее водорода. Различают *первичный нуклеосинтез*, проходивший на начальных стадиях существования Вселенной в процессе Большого Взрыва и *звездный нуклеосинтез*.

В процессе первичного нуклеосинтеза образуются элементы не тяжелее лития. Стандартная модель Большого Взрыва предсказывает следующее соотношение элементов: H — 75%,  ${}^4\text{He}$  — 25%,  $\text{H}_2$  —  $3 \cdot 10^{-5}\%$ ,  ${}^3\text{He}$  —  $2 \cdot 10^{-5}\%$ ,  ${}^7\text{Li}$  —  $10^{-9}\%$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Синтез более тяжелых ядер происходит в звездах. Легкие ядра (до углерода  ${}^{12}\text{C}$  включительно) могут синтезироваться в недрах относительно немассивных звезд в **цикле Бете** (двухчастичные взаимодействия) и тройной гелиевой реакции:  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ .

Ядра до железа  ${}^{56}\text{Fe}$  синтезируются путем слияния более легких ядер в недрах массивных звезд, синтез тяжелых и сверхтяжелых ядер идет путем нейтронного захвата в предсверхновых звездах и при взрывах сверхновых. Экспериментальным подтверждением этого факта служит низкое содержание тяжелых элементов в старых звездах, образовавшихся на ранних стадиях эволюции Вселенной.

## Космические лучи

Естественная радиоактивность космоса (**космические лучи**) представляет собой поток заряженных частиц высоких энергий, падающих на Землю из космического пространства (первичные лучи), а также поток вторичных частиц, родившихся в реакциях в верхних слоях земной атмосферы. До развития ускорительной техники космические лучи служили единственным источником элементарных частиц высокой энергии. Основными источниками первичных космических лучей являются взрывы сверхновых звезд (галактические космические лучи) и Солнце.

Химический спектр космических лучей в пересчете энергии на нуклон более чем на 94% состоит из протонов, еще на 4% — из ядер гелия ( $\alpha$ -частиц). Есть также ядра других элементов, но их доля значительно меньше. В пересчете энергии на частицу доля протонов составляет около 35%, доля тяжелых ядер соответственно больше. Кроме того, в состав космических лучей входят электроны, позитроны и антиадроны.

Традиционно частицы, наблюдаемые в космических лучах, делят на груп-

пы: легкие, средние, тяжелые и сверхтяжелые. Особенностью химического состава первичных лучей является аномально высокое (в несколько тысяч раз) содержание ядер легкой группы (литий, бериллий, бор) по сравнению с составом звезд и межзвездного газа. Данное явление объясняется тем, что частицы космических лучей под воздействием галактического магнитного поля хаотически блуждают в пространстве, прежде чем достигнуть Земли. За время блуждания ядра сверхтяжелой группы могут неупруго провзаимодействовать с межзвездным газом и расколоться на более легкие фракции. Данное предположение подтверждается тем, что космические лучи обладают очень высокой степенью изотропии.

В результате взаимодействия с ядрами атмосферы первичные космические лучи (в основном, протоны) создают большое число вторичных частиц — пионов, протонов, нейтронов, мюонов, электронов, позитронов и фотонов. Таким образом, вместо одной первичной частицы возникает большое число вторичных частиц, которые делятся на адронную, мюонную и электронно-фотонную компоненты. Такой каскад покрывает большую территорию и называется **широким атмосферным ливнем**.

В одном акте взаимодействия протон обычно теряет  $\sim 50\%$  своей энергии, а в результате взаимодействия возникают в основном пионы. Каждое последующее взаимодействие первичной частицы добавляет в каскад новые адроны, которые летят преимущественно по направлению первичной частицы, образуя адронное ядро ливня.

Образующиеся пионы могут взаимодействовать с ядрами атмосферы, а могут распадаться, формируя мюонную и электронно-фотонную компоненты ливня. Адронная компонента до поверхности Земли практически не доходит, превращаясь в мюоны, нейтрино и гамма-кванты.

## 74 Взаимодействие частиц с веществом

### Взаимодействие частиц и излучений с веществом

#### Прохождение тяжелых частиц через вещество

Тяжелая заряженная частица взаимодействует с электрическими полями электронов и атомных ядер. Она либо ионизует, либо возбуждает атомы. Осуществляется также и чисто ядерное взаимодействие частицы с атомным ядром. Основными характеристиками при ионизации являются **средние ионизационные потери** частицы на единицу длины пути,  $dE/dx$ , а также ее **полный пробег** в веществе,  $R$ .

При прохождении частицы с зарядом  $Ze$  мимо электрона происходит передача электрону импульса  $p = 2Ze^2/bv$ , где  $v$  – скорость частицы,  $b$  – прицельный параметр (минимальное расстояние между частицей и электроном). За счет взаимодействия частица теряет, а электрон приобретает энергию  $p^2/2m_e$ . При прохождении частицы через плоскопараллельный слой вещества происходит потеря энергии за счет взаимодействия со всеми электронами. Для полного пробега частицы получим формулу:  $R = (M/z^2)f(v_0) + \mathfrak{C}$ .

#### Прохождение легких частиц через вещество

Путь легкой частицы в среде будет не прямолинейным, а извилистым за счет значительной величины изменения импульса частицы при взаимодействии. Если интенсивность пучка тяжелых частиц резко обрывается при достижении глубины, равной  $R$ , то интенсивность пучка легких частиц убывает плавно. Можно ввести понятие **максимального** и **среднего** пробега. Максимальный пробег — минимальная толщина вещества, полностью задерживающая поток частиц. Средний пробег — средняя длина прямолинейного участка пути частицы.

Еще одной особенностью взаимодействия легких частиц с веществом является то, что электрон (позитрон) в результате столкновений излучает (тормозное излучение), т.е. помимо ионизационных появляются и **радиацион-**

**ные потери.** Кроме того, при движении электрона в среде проявляются *квантовые обменные эффекты*, наблюдающиеся во всякой системе тождественных частиц. Взаимодействие позитрона и электрона среды может привести к их аннигиляции.

Торможение электронов высоких энергий используется в электронных ускорителях для получения пучков  $\gamma$ -лучей. В классическом приближении интенсивность тормозного излучения определяется выражением  $w = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2$ , где  $\dot{v} = F/m_e$  – ускорение электрона. Исходя из этой формулы, получим, что интенсивность излучения при торможении протона в  $(m_p/m_e)^2 \approx 3.4 \cdot 10^6$  раз слабее излучения электронов.

Тормозное излучение при взаимодействии электрона с атомом сильно зависит от степени экранирования ЭП ядра атомными электронами. Пренебрегая экранированием, можно утверждать, что теряемая электроном на радиационное торможение энергия пропорциональна плотности вещества и пройденному в нем пути,  $-(dE/dx)_{\text{рад}} = E/l_r$ , где  $l_r$  – **радиационная длина**.

Отношение радиационных потерь к ионизационным можно рассчитать при помощи приближенного соотношения

$$\frac{(dE/dx)_{\text{рад}}}{(dE/dx)_{\text{иониз}}} \approx \frac{EZ}{800},$$

где  $E$  измеряется в МэВ. Энергия,  $E_{\text{кр}}$ , при которой радиационные потери становятся равными ионизационным, называется **критической**:  $E_{\text{кр}} \approx 800/Z$ . При очень высоких энергиях можно получить формулу для определения энергии электрона:  $E = E_0 \exp(-x/l_r)$ .

### Прохождение $\gamma$ -частиц через вещество

К  $\gamma$ -излучению относят электромагнитные волны, длина которых значительно меньше межатомных расстояний, т.е.  $\lambda \ll 1\text{\AA}$  или  $E \gg 12.5\text{ кэВ}$ . Наибольший интерес для практических приложений представляет область от десятков кэВ до сотен МэВ.

Теория прохождения  $\gamma$ -излучения через вещество – проблема квантовой электродинамики. За счет электромагнитных взаимодействий  $\gamma$ -излучение

поглощается и рассеивается веществом. Однако, радиус взаимодействия  $\gamma$ -квантов и электрона ограничен комптоновской длиной волны электрона (порядка  $10^{-13}$  м), поэтому вероятность таких столкновений довольно мала. Т.к.  $\gamma$ -частицы являются безмассовыми, они не могут замедляться в веществе, взаимодействие приводит только к изменению их траекторий, поглощению или рождению пар частица–античастица. Для квантов нельзя ввести понятие пробега.

При прохождении через вещество интенсивность  $\gamma$ -пучка экспоненциально убывает, подобно закону Бугера:  $I(x) = I(0) \exp(-n\sigma x)$ , где  $\sigma$  – полное эффективное сечение ослабления,  $n$  – концентрация атомов поглотителя. Основными процессами, выводящими кванты из параллельного пучка, являются фотоэффект, эффект Комптона и рождение электронно–позитронных пар.

Отличие фотоэффекта на  $\gamma$ -квантах в том, что электрон не может поглотить или испустить квант такой энергии. Вся энергия кванта передается электрону и атомному остатку (при этом происходит ионизация). Эффективное сечение фотоэффекта сильно зависит от энергии кванта, испытывая резкие падения на энергиях ионизации с  $i$ -й оболочки и соблюдая общее падение при увеличении энергии. Вероятность фотоэффекта пропорциональна примерно квадрату заряда ядра, поэтому он наиболее существенен при взаимодействии  $\gamma$ -квантов с тяжелыми ядрами.

При сильном возрастании энергии кванта (больше энергии связи электронов в атоме) наибольшая доля энергетических потерь приходится на эффект Комптона. Сечение рассеяния «мягких»  $\gamma$ -квантов ( $h\nu \ll m_e c^2$ ) на электроне определяется **формулой Томсона**:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2,$$

где  $r_e$  – классический «радиус» электрона ( $r_e = e^2/m_e c^2 = 2.82 \cdot 10^{-15}$  м). Томсоновское рассеяние является когерентным. Однако, рассеяние квантов с большими энергиями уже не может описываться формулой Томсона и является некогерентным. Вероятность комптоновского рассеяния на ядрах значительно ниже, т.к. в этом случае роль  $r_e$  играет величина  $Z^2 e^2/M_{\text{яд}} c^2$ .

При аннигиляции электрона и позитрона должны возникать по меньшей мере два  $\gamma$ -кванта (иначе нарушался бы закон сохранения импульса). Следовательно, свободно распространяющийся квант не может породить пару позитрон–электрон. Однако, рождение таких пар может происходить в электрическом поле ядра. Пары рождаются в околоядерной области толщиной порядка комптоновской длины волны электрона. Импульс отдачи воспринимается ядром, что обеспечивает ЗСИ. Для того, чтобы квант породил электрон–позитронную пару, его энергия должна быть больше энергий покоя этих частиц (порядка 1 МэВ). Если же пара рождается при взаимодействии кванта с электроном, электрон получает энергию того же порядка, что и частица пары, поэтому в данном случае энергия кванта должна существенно превышать 1 МэВ. В области от 2.5 до 25 МэВ расчеты для эффективного сечения образования пары на атомном ядре приводят к выражению

$$\sigma_{\text{пар}} \propto Z^2 \ln(\hbar\omega/m_e c^2).$$

При очень высоких энергиях  $\sigma_{\text{пар}} \approx 0.08 Z^2 r_e^2$  из-за экранирования заряда ядра электронами. Для квантов со сверхбольшими энергиями рождение пар становится единственным механизмом поглощения  $\gamma$ -излучения в веществе.

Помимо перечисленных возможны и такие взаимодействия частиц или излучения с веществом как: упругие соударения с атомными ядрами, излучение Вавилова–Черенкова, аннигиляционные потери, ядерный фотоэффект (выбивание из ядер нуклонов), процесс рождения мюонных пар, электрон–позитронные ливни (при сверхбольших энергиях квантов или частиц), наведение радиоактивности.

## Принципы и методы ускорения заряженных частиц

Ускоритель заряженных частиц — установка, служащая для ускорения заряженных частиц (элементарных частиц, ионов) до высоких энергий. Простейшее представление об ускорителе дает устройство электронно-лучевой трубки телевизора. Современные ускорители, подчас, являются огромными

дорогостоящими комплексами, которые не может позволить себе даже крупное государство. Например, возводимый в настоящий момент Большой адронный коллайдер в ЦЕРНе, представляет собой кольцо периметром 27 км, потребляющее 120 МВт электроэнергии.

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с ЭП и МП. ЭП способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать ее энергию. МП же, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя ее энергии, и задает орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно принципиально разделить на две большие группы: линейные ускорители, где пучок частиц однократно проходит ускоряющие промежутки, и циклические ускорители, в которых пучки движутся по замкнутым кривым типа окружностей, проходя ускоряющие промежутки много раз. Можно также классифицировать ускорители по назначению: коллайдеры, источники нейтронов, бустеры, источники синхротронного излучения, установки для терапии рака, промышленные ускорители.

Идеологически наиболее простым является **линейный ускоритель**. Высоковольтное ЭП создается т.н. **генератором Ван де Граафа**, основанном на механическом переносе зарядов транспортной лентой. Максимальные электрические напряжения  $\sim 20$  МВ определяют максимальную энергию частиц:  $\sim 20$  МэВ.

Идея **циклотрона** проста. Между двумя полукруглыми полыми электродами, т.н. дуантами, приложено переменное электрическое напряжение. Дуанты помещены между полюсами электромагнита, создающего постоянное МП. Частица, вращаясь по окружности в магнитном поле, ускоряется на каждом обороте ЭП в щели между дуантами. Для этого необходимо, чтобы частота изменения полярности напряжения на дуантах была равна частоте обращения частицы. Иными словами, циклотрон является резонансным ускорителем. Понятно, что с увеличением энергии, на каждом обороте, радиус траектории частицы будет увеличиваться, пока она не выйдет за пределы дуантов. Энергия частиц — до 50 МэВ на нуклон.

**Бетатрон** — циклический ускоритель, в котором ускорение частиц осуществляется вихревым ЭП, индуцируемым изменением магнитного потока, охватываемого орбитой пучка. Поскольку для создания вихревого ЭП необходимо изменять МП сердечника, а МП в несверхпроводящих машинах обычно ограничены эффектами насыщения железа на уровне  $\sim 20$  кГс, возникает ограничение сверху на максимальную энергию бетатрона. Бетатроны используются преимущественно для ускорения электронов до энергий  $10 \div 100$  МэВ (максимум достигнутой в бетатроне энергии — 300 МэВ).

Принципиальное отличие **фазотрона** от циклотрона — изменяемая в процессе ускорения частота ЭП. Это позволяет, за счет автофазировки, поднять максимальную энергию ускоряемых ионов по сравнению с предельным значением для циклотрона. Энергия в фазотронах достигает  $600 \div 700$  МэВ.

**Синхрофазотрон** — циклический ускоритель с постоянной длиной равновесной орбиты. Чтобы частицы в процессе ускорения оставались на той же орбите, изменяется как ведущее МП, так и частота ускоряющего ЭП. Большинство современных циклических ускорителей являются сильнофокусирующими синхрофазотронами. Для ультрарелятивистских электронов в процессе ускорения частота обращения практически не меняется, и используются **синхротроны** — циклические ускорители с постоянной длиной орбиты и постоянной частотой ускоряющего ЭП, но изменяющимся ведущим МП.

Кроме научных исследований, небольшие линейные ускорители электронов находят широкое применение в пищевой промышленности (для стерилизации продуктов питания) и медицине (лечение рака).

## Методы детектирования частиц

**Камера Вильсона** — один из первых в истории приборов для регистрации следов (треков) заряженных частиц. Принцип действия камеры использует явление конденсации перенасыщенного пара: при появлении в среде пара каких-либо центров конденсации (в частности, ионов, сопровождающих след быстрой заряженной частицы) на них образуются мелкие капли жидкости. Эти капли достигают значительных размеров и могут быть сфотографирова-

ны. Источник исследуемых частиц может располагаться либо внутри камеры, либо вне ее (в этом случае частицы залетают через прозрачное для них окно). Для исследования количественных характеристик частиц (например, массы и скорости) камеру помещают в МП, искривляющее треки.

Камера Вильсона сыграла огромную роль в изучении строения вещества. На протяжении нескольких десятилетий она оставалась практически единственным инструментом для визуального исследования ядерных излучений. Впоследствии камера Вильсона в качестве основного средства исследования радиации уступила место пузырьковым и искровым камерам.

**Пузырьковая камера** заполнена жидкостью, которая находится в состоянии, близком к вскипанию. При резком уменьшении давления жидкость становится перегретой. Если в данном состоянии в камеру попадет ионизирующая частица, то ее траектория будет отмечена цепочкой пузырьков пара и может быть сфотографирована.

В качестве рабочей жидкости наиболее часто применяют жидкие водород и дейтерий (криогенные пузырьковые камеры), а также пропан, различные фреоны, ксенон, смесь ксенона с пропаном (тяжеложидкостные пузырьковые камеры). Перегрев жидкости достигается за счет быстрого понижения давления до значения, при котором температура жидкости оказывается выше температуры кипения. Понижение давления осуществляется за время  $\sim 5 \div 15$  мс перемещением поршня либо сбросом внешнего давления из объема, ограниченного гибкой мембраной.

Частицы впускаются в камеру в момент ее максимальной чувствительности. Спустя некоторое время, необходимое для достижения пузырьками достаточно больших размеров, камера освещается и следы фотографируются (стереофотосъемка с помощью 2–4 объективов). После фотографирования давление поднимается до прежней величины, пузырьки исчезают, и камера снова оказывается готовой к действию. Весь цикл работы составляет величину менее 1 с, время чувствительности  $\sim 10 \div 40$  мс.

Пузырьковые камеры (кроме ксеноновых) размещаются в сильных магнитных полях. Это позволяет определить импульсы заряженных частиц по

измерению радиусов кривизны их траекторий.

Пузырьковые камеры, как правило, используются для регистрации актов взаимодействия частиц высоких энергий с ядрами рабочей жидкости или актов распада частиц. В первом случае рабочая жидкость исполняет роли и регистрирующей среды, и среды-мишени. Основное преимущество пузырьковой камеры — изотропная пространственная чувствительность к регистрации частиц и высокая точность измерения их импульсов. Недостаток пузырьковой камеры — слабая управляемость, необходимая для отбора нужных актов взаимодействия частиц или их распада.

**Сцинтилляторы** — вещества, обладающие способностью излучать свет при поглощении ионизирующего излучения. Как правило, излучаемое количество фотонов для данного типа излучения приблизительно пропорционально поглощенной энергии, что позволяет получать энергетические спектры излучения. Сцинтилляционные детекторы ядерных излучений — основное применение сцинтилляторов. В сцинтилляционном детекторе свет, излученный при сцинтилляции, собирается на фотоприемнике, преобразуется в импульс тока, усиливается и записывается той или иной регистрирующей системой.

Даже при поглощении частиц с одинаковой энергией амплитуда импульса на выходе фотоприемника сцинтилляционного детектора меняется от события к событию. Это связано со статистическим характером процессов сбора фотонов на фотоприемнике и последующего усиления; с различной вероятностью доставки фотона к фотоприемнику из разных точек сцинтиллятора; с разбросом высвечиваемого числа фотонов. В результате, в набранном спектре линия (которая для идеального детектора представляла бы дельта-функцию) оказывается размытой, ее можно представить в виде гауссианы с дисперсией  $\sigma$ . В качестве характеристики энергетического разрешения детектора используется полная ширина линии на половине высоты (FWHM), отнесенная к медиане линии и выраженная в процентах. FWHM в 2,355 раза больше дисперсии гауссианы. Поскольку энергетическое разрешение зависит от энергии (как правило, оно пропорционально  $E^{-1/2}$ ), его следует указывать для конкретной энергии. Чаще всего разрешение указывают для энергии

гамма-линии цезия-137 (661 кэВ).

**Счетчик Гейгера–Мюллера** — газоразрядный прибор для подсчета числа попавших в него ионизирующих частиц. Представляет собой газонаполненный конденсатор, пробивающийся при пролете ионизирующей частицы через объем газа. Дополнительная электронная схема обеспечивает счетчик питанием (как правило, не менее 300 В), обеспечивает, при необходимости, гашение разряда и подсчитывает количество разрядов.

Счетчики Гейгера разделяются на несамогасящиеся и самогасящиеся (не требующие внешней схемы прекращения разряда). Чувствительность счетчика определяется составом газа, его объемом и материалом (и толщиной) его стенок. В бытовых дозиметрах и радиометрах производства СССР и России обычно применяются 400-вольтовые счетчики.

# Список сокращений

## — А —

- АТТ — абсолютно твердое тело  
АЧТ — абсолютно черное тело

## — В —

- ВАХ — вольт–амперная характеристика

## — Г —

- ГО — гармонический осциллятор  
ГУ — граничные условия

## — Д —

- ДУ — дифференциальное уравнение

## — З —

- зБ — зона Бриллюэна  
ЗН — закон(ы) Ньютона  
ЗСИ — закон сохранения импульса  
ЗСМИ — закон сохранения момента импульса  
ЗСЭ — закон сохранения энергии

## — И —

- ИГ — идеальный газ  
ИК — инфракрасный  
ИФП — интерферометр Фабри–Перо

## — К —

- КПД — коэффициент полезного действия  
КС — консервативная сила

---

КуБ	— кинетическое уравнение Больцмана
	— М —
МП	— магнитное поле
МТ	— материальная точка
	— Н —
НУ	— начальные условия
	— О —
ОТО	— общая теория относительности
	— П —
ПВ	— пространство–время
ПдА	— принцип д’Аламбера
	— Р —
РА	— радиоактивность
РВ	— радиус-вектор
	— С —
СК	— система координат
СМТ	— система материальных точек
СО	— система отсчета
СС	— степень свободы
СТО	— специальная теория относительности
	— Т —
ТД	— термодинамика, термодинамический
ТТ	— твердое тело
	— У —
уЛ	— уравнение Лагранжа
уМ	— уравнение Мещерского
УМ	— уравнения Максвелла

---

УФ	— ультрафиолетовый
уШ	— уравнение Шрёдингера
— Ф —	
ФП	— фазовое пространство
ФП1, ФП2	— фазовый переход 1-го или 2-го рода
— Ц —	
ЦТ	— центр тяжести
ЦМ	— центр масс
— Э —	
ЭДС	— электродвижущая сила
ЭМВ	— электромагнитная волна
ЭМИ	— электромагнитная индукция
ЭМП	— электромагнитное поле
ЭП	— электрическое поле
ЭПР	— электронный парамагнитный резонанс

# ОСНОВНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Скорость света  $c = 2.997925 \cdot 10^8$  м/с.

Число Авогадро  $N_A = 6.0225 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

Гравитационная постоянная  $G = 6.670 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> =  $6.670 \cdot 10^8$  дин·см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>.

Заряд электрона  $e = 1.60210 \cdot 10^{-19}$  Кл =  $4.8030 \cdot 10^{-10}$  СГС.

Масса электрона  $m_e = 9.1091 \cdot 10^{-31}$  кг = 0.5108 МэВ.

Масса протона  $m_p = 1.67252 \cdot 10^{-27}$  кг.

Масса нейтрона  $m_n = 1.67482 \cdot 10^{-27}$  кг.

Масса  $\alpha$ -частицы  $m_\alpha = 6.644 \cdot 10^{-27}$  кг.

Число Фарадея  $F = eN_A = 9.6487 \cdot 10^4$  Кл =  $2.8926 \cdot 10^{14}$  СГС.

Диэлектрическая проницаемость вакуума  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  ф/м.

Магнитная проницаемость вакуума  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Постоянная Планка  $h = 6.6748 \cdot 10^{-34}$  Дж·с =  $6.6748 \cdot 10^{-27}$  эрг·с.

$$\hbar = h/2\pi = 1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

Постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/(\hbar c) = 7.2910 \cdot 10^{-3}$ ;  $1/\alpha = 137.039$ .

Комптоновская длина волны  $\lambda_0 = h/(m_e c) = 2.42621 \cdot 10^{-12}$  м.

Постоянная Ридберга  $R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi \hbar^3 c} = 1.0973731 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>.

Радиус Бора  $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2) = 5.29187 \cdot 10^{-11}$  м.

Магнетон Бора  $\mu_B = 9.2732 \cdot 10^{-24}$  Дж·Тл<sup>-1</sup> =  $9.2732 \cdot 10^{-21}$  эрг·Гс<sup>-1</sup>.

Нормальный объем газа  $V_0 = 22.414 \text{ м}^3/\text{кмоль}$  (л/моль).

Универсальная газовая постоянная  $R = 8.3143 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}) =$   
 $= 1.9858 \text{ кал}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ .

Постоянная Больцмана  $k = R/N_A = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$ .

Постоянная Стефана–Больцмана  $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К}^4)$ .

Постоянная Вина  $b = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}$ .

Средний радиус Земли  $6371 \text{ км}$ .

Масса Земли  $5.98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ .

Радиус Солнца  $6.96 \cdot 10^8 \text{ км}$ .

Масса Солнца  $1.99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ .

Среднее расстояние от Земли до Солнца  $1.496 \cdot 10^8 \text{ км}$ .

# Важнейшие формулы векторного анализа

Скалярное произведение двух векторов

$$\vec{A}\vec{B} = AB \cos(\widehat{\vec{A}\vec{B}}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Векторное произведение двух векторов

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(\widehat{\vec{A}\vec{B}}).$$

Оператор «набла»

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор Лапласа,  $\Delta = \nabla^2$

*декартовы координаты*

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

*сферические координаты  $(R, \theta, \alpha)$*

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2};$$

*цилиндрические координаты  $(R, \theta, z)$*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Градиент, дивергенция и ротор

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \quad \text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A}; \quad \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}.$$

**Теорема Остроградского–Гаусса** ( $V$  – объем, охватываемый поверхностью  $S$ )

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV.$$

**Теорема Стокса** ( $S$  – поверхность, натянутая на замкнутый контур  $L$ )

$$\oint_L \vec{A} d\vec{L} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}.$$

**Теорема Грина**

$$\int \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV$$

**Повторное дифференцирование**

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi;$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times [\nabla \times \vec{A}] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

# Связь между некоторыми единицами

**Сила**  $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин} = 1/9.81 \text{ кгс}$ .

**Работа, энергия**  $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг} = 0.239 \text{ кал} = 2.78 \cdot 10^{-7} \text{ кВт}\cdot\text{ч}$ .

**Мощность**  $1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ Эрг/с} = 0.102 \text{ кгс}\cdot\text{м/с} = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ л.с.}$

**Заряд**  $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ} = 0.1 \text{ СГСМ}$ .

**Напряженность**  $1 \text{ В/м} = 3.34 \cdot 10^{-5} \text{ СГСЭ} = 10^6 \text{ СГСМ}$ .

**Электрическое смещение**  $1 \text{ Кл/м} = 3.77 \cdot 10^6 \text{ СГСЭ} = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ СГСМ}$ .

**Потенциал**  $1 \text{ В} = 3.34 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ} = 10^8 \text{ СГСМ}$ .

**Емкость**  $1 \text{ Ф} = 8.99 \cdot 10^{11} \text{ см} = 10^{-9} \text{ СГСМ}$ .

**Сила тока**  $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ} = 0.1 \text{ СГСМ}$ .

**Сопротивление**  $1 \text{ Ом} = 1.11 \cdot 10^{-12} \text{ СГСЭ} = 10^9 \text{ СГСМ}$ .

**Магнитная индукция**  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс} = 3.34 \cdot 10^{-7} \text{ СГСЭ}$ .

**Магнитный поток**  $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс} = 3.34 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ}$ .

**Напряженность магнитного поля**  $1 \text{ А/м} = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ Э} = 3.77 \cdot 10^8 \text{ СГСЭ} = 10^{-2} \text{ Ав/см}$ .

**Индуктивность**  $1 \text{ Гн} = 10^9 \text{ см} = 1.11 \cdot 10^{-12} \text{ СГСЭ}$ .

# Литература

- [1] А.Н. Матвеев. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
- [2] А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
- [3] А.Н. Матвеев. Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1987.
- [4] А.С. Давыдов. Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
- [5] В.И. Блохинцев. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983.
- [6] Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976.
- [7] Д.В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. М.: Наука, 1989.
- [8] И.В. Савельев. Курс общей физики. В трех томах. М.: Наука, 1970.
- [9] И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
- [10] И.П. Базаров. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983.
- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [12] Л.Л. Гольдин, Г.И. Новикова. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.
- [13] Н.И. Жирнов. Задачник–практикум по электродинамике. М.: Просвещение, 1964.
- [14] С.Г. Калашников. Электричество. М.: Наука, 1985.
- [15] Физическая энциклопедия. В пяти томах. М.: Сов. энциклопедия, 1988.
- [16] Э.В. Шпольский. Атомная физика. В двух томах. М.: Наука, 1974.

- 
- [17] Ю.Ф. Голубев. Основы теоретической механики. М.: изд. МГУ, 1991.
- [18] <http://wikipedia.org> — «Википедия» — самый большой в мире электронный учебник.

# Предметный указатель

- $\gamma$ -излучение, 390
- P–N переход, 206
- Адиабата, 115
- Адиабатическое приближение, 322
- Адроны, 377
- Акустика, **84–85**
- Акцептор, 205
- Аморфное тело, 136
- Анизотропия, 136
- Антиферромагнетизм, 193
- Аромат кварков, 382
- Аэростатика, 59
- Барионы, 377
- Барн, 359
- Биения, 73
- Бином Ньютона, 94
- Ближняя зона, 248
- Бозе–конденсат, 301, 333, 339
- Бозон, 300
- Бра–вектор, 289
- Вакуум, 149, 378
- Валентная аппроксимация, 326
- Валентность, 320
- Варикап, 207
- Вектор
- Бюргерса, 140
  - волновой, 204
  - намагничивания, 185
  - поляризации, 169
  - сжатия, 58
  - Умова–Пойнтинга, 84, 218, 231
- Вероятность, 88
- Вечный двигатель, 119
- Взаимодействие
- Блоховское, 210
  - гравитационное, 373
  - излучения с веществом, **390–392**
  - сильное, 372
  - слабое, 373, 384
  - спин–орбитальное, 288, 306
  - частиц с веществом, **389–390**
  - электромагнитное, 373, **380**
  - электрон–фононное, 208
  - электрослабое, 378, 386
- Взаимоиндукция, 195
- Вибратор Герца, 218
- Видность, 240
- Виды поляризации, 261
- Внутренняя конверсия, 355
- Волна
- де Бройля, 276
  - звуковая, 84
  - капиллярная, 153
  - монохромная, 234

- парциальная, 318  
поперечная, 81  
продольная, 81  
спиновая, 193  
стоячая, 82  
ударная, 85
- Волновая поверхность, 81
- Волновой пакет, 234
- Волны, **79–85**  
ленгмюровские, 156
- Волчок, 48
- Восприимчивость  
диэлектрическая, 135  
магнитная, 135
- Время  
когерентности, 73  
релаксации, 77, 113, 145, 199  
собственное, 43, 220
- Вырождение, 338
- Вязкость, 65  
динамическая, 147
- Газ  
вырожденный, 300  
идеальный, 92, 111  
реальный, 125
- Гамильтониан, 294
- Гамма-излучение, 355
- Гармоника, 82
- Гармонический анализ, 74
- Генератор Ван де Граафа, 393
- Гидростатика, 59
- Гиперзаряд, 376
- Гиромагнитное отношение, 188, 190, 305, 310
- Гироскоп, 52
- Гистерезис, 191
- Главная плоскость, 263
- Глюоны, 378, 382
- Голография, 236, 253
- Гравитон, 373
- Граничные условия, 165
- Давление, 56  
магнитное, 157
- Дальняя зона, 248
- Движение, 12  
брауновское, 106  
вращательное, 108  
поступательное, 106–107  
в центрально-симметричном поле, **34–36**  
закон, 12  
количество, 17  
описание, 12  
спутников, 36  
твердого тела, 15  
уравнения, 18
- Действие, 19
- Дейтерий, 366
- Декремент затухания, 200  
логарифмический, 77
- Детандер, 131
- Детекторы, **394–397**

- Дефект кристалла, 140  
Дефект массы, 349, 370  
Деформации и напряжения, **54–55**  
Деформация, 54  
Децибел, 84  
Диаграмма  
    векторная, 72, 246  
    весовая, 381  
    направленности, 103, 219  
    Фейнмана, 374  
Диамagnetизм, 188  
Диамagnetик, 187  
Диод, 207  
Диполь, 162  
Дисперсия, 88, 94, 253  
    линейная, 254  
    угловая, 254  
Дифракционная решетка, 251  
Дифракция, 244  
    Брэгга, 252  
    на краю экрана, 247  
    на отверстии, 246  
    на экране, 246  
    Рамана–Ната, 252  
    Френеля, 246  
Диффузия, 146  
Диэлектрик, 171, 205  
Диэлектрическая восприимчивость,  
    169, 172  
Диэлектрическая    проницаемость,  
    169
- Длина  
    волны, 80, 218  
    дифракционная, 248  
    приведенная, 49  
    радиационная, 390  
    свободного пробега, 104, 156  
    связи, 321  
Длина волны  
    комптоновская, 279  
Добротность, 200  
Домен, 192  
Донор, 205  
Дырка, 205
- Емкость, 168  
    барьерная, 207  
    диффузионная, 207  
Естественное уширение, 267
- Жидкости, 150–151**
- Задача  
    механики, 18  
    Циолковского, 27
- Закон  
    Авогадро, 96  
    Ампера, 179  
    Архимеда, 60  
    Био–Савара–Лапласа, 179  
    Блоха, 194  
    Бугера–Ламберта, 233  
    Бугера–Ламберта–Бэра, 259

- Бугера–Ламберта–Фабриканта, 271
- Бэра, 233
- Гука, 55, 56
- Джоуля, 114
- Джоуля–Ленца, 176, 203
- Дюлонга и Пти, 116
- инерции, 16
- Кеплера, 34
- Керра, 266
- Кирхгофа, 268
- Кулона, 160
- Кюри, 135, 189
- Кюри–Вейсса, 193
- кубов Дебая, 118
- Лапласа, 152
- Ленца, 184
- Малюса, 261
- Ньютона
- второй, 17
  - второй для СТО, 45
  - для напряжений, 67
  - первый, 16
  - третий, 17
- Ньютона–Стокса, 147
- Ома, 176, 202
- дифференциальный, 167
- Паскаля, 59
- подобия течений, 69
- Рэля, 103
- Снеллиуса, 239, 262
- Стефана–Больцмана, 268
- Столетова, 275
- смещения Вина, 268
- сохранения, 25, 376
- импульса, 22, 26
  - момента импульса, 33
  - момента импульса ГТ, 51
  - энергии, 22, 28, 30
- Фарадея, 194
- Фика, 146
- Фурье, 147
- электромагнитной индукции, 184, 194
- Заряд
- барионный, 368, 375
  - лептонный, 375
  - поляризационный, 168
  - свободный, 169
  - электрический, 375
- Золотое правило Ферми, **363–364**
- Зонная пластинка, 247
- Зонная теория, 326
- Зоны Бриллюэна, 204, 328
- Зоны Френеля, 245
- Изгиб, 58
- Излучение
- тепловое, 268
  - тормозное, 276
- Изобары, 350
- Изоморфизм, 139
- Изоспин, 368, 375

- Изотермическая система, 90
- Изотоны, 350
- Изотоп, 310, 350
- Изотропия, 237
- Импульс, 22  
     в СТО, 45  
     обобщенный, 22  
     силы, 17  
     тела, 17
- Индекс Миллера, 139
- Индуктивность, 184, 195
- Индукция  
     магнитная, 179  
     остаточная, 191  
     электрическая, 169  
     электрического поля, 161
- Интеграл  
     Гюйгенса–Френеля, 245  
     движения, **21–22**  
     Кирхгофа–Гельмгольца, 249  
     обменный, 192  
     состояний, 91  
     столкновений, 343  
     Фурье, 74
- Интенсивность звука, 84
- Интервал, 44  
     релятивистский, 220
- Интерференция, 238
- Интерферометр  
     Майкельсона, 239  
     звездный, 242
- Фабри–Перо, 243
- Юнга, 241
- Инфразвук, 84
- Испарение, 150
- Калибровка Лоренца, 217
- Калибровочная инвариантность, 163
- Камера Вильсона, 394
- Канал реакции, 358
- Канонические распределения, **89–91**
- Картина Эйри, 251
- Квазистационарные поля, 196
- Квазистационарные явления, 181
- Квазичастицы, 208
- Квант, 274
- Квантование  
     вторичное, **364–365**
- Квантовое число  
     главное, 304  
     магнитное, 190, 304  
     орбитальное, 304  
     полное, 310
- Квантовый дефект, 287, 312
- Кванты, 377
- Кварки, 378, 381
- Кинетическое уравнение Больцмана, **153–154**
- Когерентность, 240
- Колебания, **71–79**  
     апериодические, 77

- вынужденные, 78  
гармонические, 71  
    в контуре, 198  
добротность, 77  
затухающие, 76  
когерентные, 73  
нормальные, 201  
поляризованные, 75  
    свободные, 71  
Компрессор, 131  
Конденсатор, 168  
Конфигурация электронная, 308  
Космические лучи, **387–388**  
Коэффициент  
    взаимной индукции, 184  
    вириальный, 126  
    вязкости, 66  
    диффузии, 107, 146  
    затухания, 199  
    лобового сопротивления, 70  
    Пуассона, **57**  
    подъемной силы, 71  
    полезного действия, 122  
    размножения, 360  
    сжимаемости, 58  
    сопротивления, 176  
    теплопроводности, 147  
    упаковочный, 349  
    упругости, 56  
    Эйнштейна, 270  
Кристалл, 136, 263  
    жидкий, 141  
Кристаллизация, 150  
Критерий  
    Рейнольдса, 69  
    Фруда, 69  
Кручение, 57  
Куперовские пары, 214, 334  
Кэт–вектор, 289  
Лазер, 272  
    на свободных электронах, **280**  
Лептоны, 377, 384  
Линия тока, 61, 175  
Лоренцева форма, 267  
Лоренцево смещение, 310, 316  
Люминесценция, 271  
Магическое число, 370  
Магнетик, 187  
Магнетон Бора, 190, 305  
Магнитная восприимчивость, 186  
Магنون, 193  
Марковский процесс, 110  
Масса, 16, 375  
    в СТО, 45  
    гравитационная, 17  
    инертная, 17  
    переменная, 27  
    приведенная, 286  
    электрона эффективная, 328  
Материальная точка, 19  
Матрица  
    Дирака, 347

- Маятник  
    Фуко, 39  
    уравнение движения, 40  
    физический, 49
- Мезоатомы, 286
- Мезоны, 377
- Метод  
    Гиббса, 148, 341  
    Ламперта, 99  
    магнитного охлаждения, 131  
    темного поля, 236  
    фазового контраста, 236  
    эффективной массы, 329
- Механизмы ядерных реакций, **361–362**
- Мода лазера, 273
- Модель  
    атома векторная, 314  
    Бардина–Пайнса, 212  
    БКШ, 333  
    Блоха, 209  
    Гаусса, 349  
    Планетарная, 283  
    Томсона, 282  
    твердого тела, 325  
    Ферми, 349
- Модуль  
    кручения, 57  
    сдвига, 57  
    Юнга, **56**
- Модуль Юнга, 80
- Модуляция, 233
- Момент  
    гироскопический, 54  
    дипольный, 162  
    импульса, 33, 46  
    инерции, 47, 58  
    полярный, 47  
    центробежный, 47  
    квадрупольный, 163  
    магнитный, 181, 309, 375  
    наведенный, 188  
    орбитальный, 288  
    силы, 33, 46
- Монокристалл, 136
- Мощность тока, 176
- Мультиплет, 288
- Мультиплетность, 309
- Н–теорема, **154–155**
- Наблюдаемая, 289  
    полная, 294  
    совместная, 294
- Напряжение, 55  
    магнитное, 180  
    на участке цепи, 177  
    электрическое, 176
- Напряженность  
    магнитная, 180  
    магнитного поля, 185  
    электрического поля, 160
- Насыщаемость связи, 321
- Натяжение, 56

- Начало ТД  
    второе, 120  
    первое, 114, 118  
    третье, 124
- Нейтрино, 353, 385
- Нейтронный избыток, 350
- Неравенство Клаузиуса, 121
- Несжимаемая жидкость, 62
- Нуклеосинтез, **386–387**
- Нуклиды, 350
- Нуклон, 365
- Обертон, 84
- Обменное взаимодействие, 320
- Обменные силы, 369
- Обобщенная координата, 20
- Обобщенные координаты, 19
- Обратная решетка, 328
- Оператор, 289  
    возмущения, 299  
    Лапласа, 164  
    линейный, 291  
    эволюции, 290  
    эрмитов, 291
- Определитель Слэтера, 327
- Опыт  
    Аббе–Поттера, 236  
    Девиссона–Джермера, 277  
    Майкельсона, 41  
    Резерфорда, 348  
    Томсона и Тартаковского, 278  
    Франка и Герца, 284
- Опыты Лебедева, 232
- Орбиталь молекулярная, 321
- Оси намагничивания, 192
- Очарование, 376
- Пара сил, 33
- Парадокс  
    близнецов, 45  
    гидростатический, 60  
    д'Аламбера, 62
- Парамагнетизм, 189
- Парамагнетик, 188
- Параметр  
    вырождения, 300, 338  
    макроскопический, 122
- Параметры  
    интенсивные, 111  
    термодинамические, 111  
    экстенсивные, 111
- Период волны, 80
- Плазма, **155–158**
- Плазмон, 332
- Плечо силы, 46
- Плоскость поляризации, 218, 260
- Плотность  
    энергии ЭП, 170  
    вероятности, 88  
    заряда  
        объемная, 161  
        поверхностная, 165, 166  
    импульса, 232  
    потока вероятности, 292

- спектральная, 237  
тока, 165, 175  
    молекулярного, 185  
    энергии ЭП, 165  
Поверхностные явления, **152–153**  
Поглощение света, 233  
Подвижность электронов, 202  
Подобные течения, 69  
Позитроний, 286  
Показатель  
    адиабаты, 115  
    поглощения, 233  
    политропы, 116  
    преломления, 233  
    комплексный, 256  
Поле  
    самосогласованное, 307, 327  
    сильное, 314  
    скоростей, 60  
    слабое, 314  
Поликристалл, 136  
Полиморфизм, 139  
Полином Чебышева–Эрмита, 296  
Политропа, 115  
Полупроводник, 204  
Полуширина, 244  
Поляризатор, 261  
Поляризация, 169  
Поляризуемость, 258  
Полярон, 211, 336  
Постоянная  
    Больцмана, 96  
    Ван дер Ваальса, 127  
    Верде, 266  
    газовая универсальная, 96  
    капиллярная, 153  
    магнитная, 179  
    Планка, 269, 274  
    Ридберга, 282  
    решетки, 137  
    Стефана–Больцмана, 268  
    тонкой структуры, 288, 306  
    Холла, 183  
Постулат  
    Планка, 283  
    равновероятности, 93  
    термодинамики  
        второй, 112  
        нулевой, 112  
        первый, 112  
Постулаты Бора, 283  
Потенциал  
    термодинамический, 92  
    Бардина–Шокли, 210  
    Вуда–Саксона, 367  
    векторный, 180  
        четырёхмерный, 222  
    Гиббса, 92, 132, 142  
    Леннарда-Джонса, 126  
    обобщенный, 21  
    самосогласованного поля, 344  
    скоростей, 62

- термодинамический, 132  
химический, 135, 142, 300  
электрического поля, 160  
Юкавы, 366
- Поток, 161  
магнитный, 183  
энергии, 83
- Потокосцепление, 195
- Пояс Роговского, 187
- Правила  
Кирхгофа, 177  
отбора, 288, 324, 355  
Хунда, 313
- Правило  
Жуковского, 54  
Ленца, 194  
рекомбинационного запрета, 324  
Стокса, 271  
Фейнмана, 374  
фаз Гиббса, 143
- Преобразование симметрии, 136
- Преобразования  
Галилея, 43  
Лоренца, 41, 219
- Прецессия, 53
- Приближение  
адиабатное, 207  
Борна–Оппенгеймера, 326  
Кирквуда, 151  
Фраунгофера, 249  
Френеля, 249
- Хартри–Фока, 327
- Принцип  
д’Аламбера, 38  
виртуальных перемещений, 20  
Гамильтона вариационный, **19–20**  
Гюйгенса, 244  
Гюйгенса–Френеля, 245  
д’Аламбера–Лагранжа, 20  
детального равновесия, 89, 345  
дискретности, 289  
дополнительности, 302  
запрета Паули, 301  
изоспиновой инвариантности, 369  
комбинационный, 282  
ле Шателье–Брауна, 134  
Нернста, 124  
неопределенности, **301–302**  
ослабления корреляции, 343  
относительности, 41  
Паули, 203, 306  
  обобщенный, 368  
соответствия, 43, 284, 289  
суперпозиции  
  сил, 17  
  электрического поля, 161  
Франка–Кондона, 324  
эквивалентности, 17
- Прицельный параметр, 156
- Проводимость, 176

- собственная, 205  
удельная, 176
- Проводник, 202, 204
- Промежуточные бозоны, 384
- Проницаемость  
диэлектрическая, 135, 168  
комплексная, 256  
магнитная, 135, 186
- Протон, 348
- Процесс, 113  
марковский, 345  
политропный, 115  
релаксационный, 145
- Прочность связи, 321
- Пузырьковая камера, 395
- Работа  
выхода, 275  
силы, 28  
тока, 176
- Равенство Клаузиуса, 121
- Равновесие  
тепловое, 89  
термодинамическое, 97
- Радиационное трение, **237–238**
- Радиоактивность, 352
- Радиус  
Дебая, 156  
электрона, 238
- Разрешающая способность, 254
- Распределение  
Больцмана, 101, 207  
биномиальное (Бернулли), 93  
Гиббса, 90  
Максвелла, 98  
Максвелла–Больцмана, 101  
нормальное (Гауссово), 88, 94  
Пуассона, 94
- Рассеяние, 317  
виды, 317  
комбинированное, 104  
Мандельштама–Бриллюэна, 104  
молекулярное, 103  
света, 103  
частиц, 31
- Реактивность, 360
- Резонанс, 78, 200  
параметрический, 79
- Резонансы, 377
- Релаксация, 113
- Решетка Браве, 138
- Ряд Фурье, 74
- Самоиндукция, 184, 195
- Сверхпроводимость, 212, 333
- Сверхтекучесть, 335
- Сверхтонкая структура, 310
- Связи, 14
- Связь  
 $JJ$ , 309  
Рёссел–Саундерсова, 309  
химическая, 321
- Сдвиг, 57
- Серии излучения водорода, 282

- Сечение  
  рассеяния, 317  
  рассеяния, 32  
  эффективное, 105, 156
- Сила, 16  
  осциллятора, 258  
  Ампера, 216  
  Ван дер Ваальса, 125  
  в СТО, 45  
  консервативная, 29  
  коэрцитивная, 191  
  Лорентца, 183  
  Лоренца, 21, 216, 231  
  обобщенная, 20, 22  
  обобщенно-потенциальная, 39  
  объемная, 59  
  поверхностная, 59  
  пондеромоторная, 170, 178  
  потенциальная, 29  
  реакции связи, 14  
  сторонняя, 177  
  тока, 165, 175  
  центральная, 18  
  электродвижущая, 177  
  ядерная, 365
- Символика Браве, 136
- Синглет, 288
- Сингония, 138
- Синус интегральный, 250
- Синхротрон, 394
- Синхротронное излучение, **279**
- Синхрофазотрон, 394
- Система, 111  
  автоколебательная, 79  
  изолированная, 112  
  консервативная, 30  
  координат  
    главная, 55  
  линейная, 76  
  материальных точек, 13  
  отсчета  
    замкнутая, 25  
    инерциальная, 16  
    неинерциальная, 36  
  статистическая, 89  
  термодинамическая, 111  
  эргодическая, 113
- Скин-эффект, 167
- Скобки Пуассона, **24**
- Скорость, 12  
  групповая, 234, 254, 259  
  критическая, 70  
  линейная, 12  
  наивероятнейшая, 99  
  объемного расширения, 67  
  относительная, 37  
  переносная, 37  
  представление, 13  
  света, 218, 230  
  секторная, 34  
  угловая, 12  
  фазовая, 81, 234, 253, 259

- характерная, 99
- Случайная величина, 88
- Собственное значение, 289
- Соотношения
- коммутационные, 301
  - неопределенностей, 301
- Соотношения Максвелла, 92, 132
- Соотношения неопределенности, 277
- Сопrotивление, 176
- Состояние, 289
- квазистационарное, 297
  - макроскопическое, 92, 111, 122
  - метастабильное, 128
  - микроскопическое, 92, 111, 122
  - равновесное, 93
  - собственное, 289
  - стационарное, 111
- Соударение тел, 30
- Спектр, 234
- излучения, 250
  - дискретный, 295
  - квазинепрерывный, 295
  - комбинированный, 104
  - пространственный, 235
- Спектральный анализ, 253
- Спектральный терм, 282
- Спин, 288, 306, 375
- ядра, 351
- Спираль Корню, 247
- Спираль Френеля, 246
- Среднее, 88
- Стандартное отклонение, 94, 102
- Статистика
- Бозе–Эйнштейна, 300, 337
  - Максвелла–Больцмана, 300
  - Ферми–Дирака, 203, 300, 338
- Статистическая сумма, 91
- Статистический ансамбль, 89, 93, 341
- Степени свободы, 19
- Степень
- ионизации, 155
- Степень поляризации, 260
- Степень свободы, 105
- Стереохимия, 324
- Странность, 376
- Супермультиплеты, 381
- Сцинтиллятор, 396
- Счетчик Гейгера–Мюллера, 397
- Тембр, 84
- Температура, 89, 97, **112**
- абсолютного кипения, 145
  - вырождения, 300, 338
  - Дебая, 118
  - инверсии, 130
  - Кюри, 193
  - критическая, 126
  - Нееля, 193
  - статистическая, 91
- Тензор
- диэлектрической восприимчиво-

- сти, 170
- момента инерции, 47
- напряжений, 55
- натяжений, 170
- Теорема
  - Винера–Хинчина, 241
  - Гюйгенса, 49
  - Ирншоу, 162
  - Карно
    - вторая, 122
    - первая, 122
  - Кёнига, 51
  - Кирхгофа–Гельмгольца, 249
  - Лармора, 40, 188
  - Лиувилля, 89, 149, 342
  - Остроградского–Гаусса, 161, 174
  - о движении центра масс, 14, 26
  - о равномерном распределении  $E_k$  по СС, 105
  - об изменении импульса, 26
  - оптическая, 319
  - Резаля, 50
  - Штейнера, 47
  - Эйлера, 52
  - Эренфеста, 291
- Теория
  - Аббе, 255
  - БКШ, 214
  - Великого объединения, 379
  - возмущений, 299
    - нестационарная, **362–363**
  - Гайтлера–Ландена, 320
  - Друде–Лоренца, 202
  - Коссея, 320
  - мезонная, 369
  - относительности, 41
  - суперструн, 379
- Теплоемкость, 114
- Теплообменник, 131
- Теплота
  - скрытая, 143
  - фазового перехода, 141
- Терм, 287, 309
- Течение, 70
- Тождество Якоби, 24
- Ток
  - молекулярный, 185
  - смещения, 216
  - Фуко, 194
  - электрический, 175
  - элементарный, 181
- Тонкая структура, 288, 310
- Точка Кюри, 144
- Траектория, 12
  - фазовая, 89
- Транзитивность, 112
- Трансляция, 137
- Тройная точка, 142
- Трубка тока, 61, 175
- Углы Эйлера, 15
- Угол
  - Брэгга, 252

- Брюстера, 262  
 нутации, 52  
 прецессии, 52  
 собственного вращения, 52  
 Удар, 31  
 Удельная рефракция, 258  
 Ультразвук, 84  
 Ультрафиолетовая катастрофа, 269  
 Уравнение  
   адсорбции Гиббса, 152  
   Бернулли, 61  
   Ван дер Ваальса, 127  
   Власова, 344  
   волновое, 82, 217, 230  
   Гамильтона–Якоби, **24–25**  
   Гельмгольца, 235, 248  
   Гиббса–Гельмгольца, 92, 134  
   Грэда–Шафранова, 157  
   гидростатики  
     основное, 59  
   Дирака, **346–347**  
   д’Аламбера, 217  
   движения, 19  
   Клапейрона–Клаузиуса, 143  
   кинетического баланса, 345  
   колебаний  
     гармонического осциллятора,  
       72  
     затухающих, 76  
     перпендикулярных, 75  
   Лагранжа, 20, **20–21**  
     для НИСО, 38  
 Ланжевена, 109  
 Лапласа, 164  
 Лиувилля, 148, 342  
 Майера, 115  
 Максвелла, 167  
 Менделеева–Клапейрона, 60, 96,  
   112  
 Мещерского, 27  
 моментов, 33  
 Навье–Стокса, 67, 229  
 непрерывности, 148, 175, 229  
 неразрывности, 65  
 нормалей Френеля, 264  
 Пуассона, 161, 180  
 переноса, 146  
 плоской волны, 81  
 реологическое, 66  
 Смолуховского, 110  
 состояния, 59, 112, 132  
   идеального газа, 96  
 стационарности, 176  
 стохастическое, 109  
 термическое, 112  
 термодинамики основное, 91  
 Шрёдингера, 203, 291  
 Эйлера, 59  
 Эйнштейна, 275  
 Эрнфеста, 144  
 эйконала, 25  
 энергии, 112

## Уравнения

Гайзенберга, **290–291**Гамильтона, **23**

Максвелла, 215, 230

материальные, 226, 230

Эйлера

динамические, 51

кинематические, 52

Уровень Ферми, 203

Ускорение, 13

Кориолисово, 37

переносное, 37

Ускоритель, **392–394**

Фаза, 141

волны, 80

Шубникова, 213

Фазовая пластинка, 247, 265

Фазовое пространство, 89, 289

Фазовый

переход, 141

множитель, 292

объем, 300

сдвиг, 319

Фазотрон, 394

Фактор Ланде, 310, 315

Фермион, 300

Ферромагнетизм, 193

Ферромагнетизм, 191

Ферромагнетик, 188

Фигуры Лиссажу, 75

Флуктуация, 102

Флюксметр, 187

Фонон, 208, 332

Формула

Бальмера, 282

Бальмера–Ридберга, 287

Бейцеккера, 370

Бернулли, 93

Больцмана, 124

барометрическая, 60, 101

Вина, 269

Гагена–Пуазейля, 68

Жуковского–Кутта, 64

Клаузиуса–Моссотти, 173

Крамерса–Кронига, 257

Ланжевена–Дебая, 172

Лорентца–Лоренца, 258

Лоренца, 237

Остроградского–Гаусса, 66

Планка, 237, 269, 274

Резерфорда, 32, 318

Рэля, 259

Рэля–Джинса, 269

Саха, 155

Стирлинга, 94

Стокса, 71

сложения ускорений, 37

Томсона, 391

Эйнштейна, 107

Формулы Френеля, 262

Фотон, 380

Фотопроводимость, 274

- Фотоупругость, 266
- Фотоэффект, 274
- Функция
- аппаратная, 254
  - Бесселя, 251
  - Блоха, 204, 327, 333
  - Бриллюэна, 190
  - волновая, 203, 291
  - Гамильтона, 23
  - Грина, 235, 249
  - Дирака, 90
  - Кирхгофа, 237, 268
  - Лагранжа, 19, **20–21**
  - Ланжевена, 134, 173, 190
  - мультипликативная, 91
  - распределения вероятности, 88
  - Фрелиха, 334
- Фурье–анализ, 235
- Фурье–синтез, 235
- Характерное время, 372
- Химический потенциал, 337
- Цвет кварков, 381
- Центр
- качания, 49
  - масс, 26
- Цепочка Боголюбова, 343
- Цикл
- Бете, 387
  - термодинамический, 119
    - Карно, 119
    - Клапейрона, 119
    - Клаузиуса–Ранкина, 120
  - Цикл Карно, 122
- Циклические процессы, **119–120**
- Циклотрон, 393
- Циклотронное излучение, **278–279**
- Частота
- биений, 74
  - волны, 80
  - Лармора, 40, 188
  - ленгмюровская, 344
  - основная, 82
  - плазменная, 156, 260
  - стоксова, 104
- Четность, 351, 375
- зарядовая, 376
- Четырехвектор, 221
- Число
- Авогадро, 108
  - волновое, 81, 218
  - Маха, 68
  - массовое, 375
  - Рейнольдса, 68
    - магнитное, 157
  - Струхаля, 69
  - Френеля, 246
  - Фруда, 68
  - Циолковского, 27
- Шум, 84
- ЭДС, 177
- магнитной индукции, 184

- Эквибара, 59
- Экситон, 208, 332
- Электромагнитные волны, 230
- Электронный парамагнитный резонанс, 316
- Электроотрицательность, 325
- Электропроводимость, 176, 202
- Элементарная ячейка, 137
- Энергетическая зона, 328
- Энергия
- внутренняя, 92, 132
  - возбуждения, 359
  - кинетическая, 29
  - ТТ, 51
  - критическая, 390
  - механическая, 22
  - обменная, 192
  - покоя, 46
  - потенциальная, 29
  - свободная, 91, 92, 132
  - связи, 321, 349
  - упругая, 56
  - электрического поля, 165
- Энтальпия, 92, 129, 132
- Энтропия, 120
- Эргодическая гипотеза, 102, 122, 341
- Эффект
- Баркгаузена, 192
  - Джоуля-Томсона, 130
  - Доплера, 85, 252
  - Зеемана, 310, 315
  - изотопический, 286, 310
  - Керра, 266
  - Комптона, 276, **279**
  - Коттона–Муттона, 266
  - Магнуса, 64
  - Мёссбауэра, 356
  - Пашена–Бака, 316
  - Рамзауэра, 319
  - туннельный, 297
  - Фарадея, 266
  - Холла, 183
  - Черенкова–Вавилова, **278**
  - Штарка, 317
- Ядерные реакции, **357–359**
- Ядерный реактор, **359–361**
- Ядро атома, 348