Компьютерная обработка результатов измерений

Лекция 6. Анализ временных рядов. Фурье– и Вейвлет–анализ

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН

Лаборатория обеспечения наблюдений

5 октября 2016 года

1 Аппроксимация и интерполяция

Аппроксимация и интерполяция

Аппроксимация. Некоторую функцию $f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$ требуется приближенно заменить некоторой функцией $g(x)$ так, чтобы отклонение $g(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим.

Точечная (интерполяция, среднеквадратичное приближение и т.п.) и непрерывная аппроксимации.

Интерполяция является частным случаем аппроксимации, позволяющем вычислить промежуточные значения дискретной функции.

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n.$$

Аппроксимация и интерполяция

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n.$$

Выбирая первые N членов ряда Тейлора получаем разные виды интерполяции. Линейная:

$$f_n(x) \approx y_n + (x - x_n)\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

Ньютона (для равноотстоящих x, $h = x_{n+1} - x_n$):

$$f_n^k(x) \approx y_n + q\Delta y_n + \frac{1(1-q)}{2!}\Delta^2 y_n + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!}\Delta^k y_n,$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$, Δ^i – конечные разности ($\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, ..., $\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$).

Сплайн — кусочная полиномиальная функция, которая на заданном отрезке может принимать очень простую форму, в то же время имея гибкость и гладкость.

Степенной сплайн

Набор полиномов степени k со следующими ограничениями:

- сплайны должны совпадать в узловых точках с задающей функцией: $p_n(x_n) = f(x_n)$;
- предыдущий сплайн должен переходить в следующий в точках сшивания, $p_n(x_n) = p_{n+1}(x_n)$;
- все производные до $f^{(k-1)}$ должны быть непрерывными и гладкими: $p_n^i(x_n) = p_{n+1}^i(x_n)$ для $i = \overline{1, k-1}$;

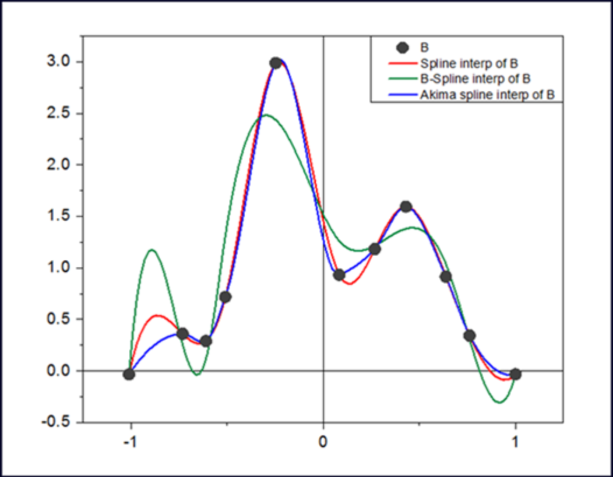
$n-1$ полином степени k имеют $(k+1)(n-1) = (k+1)n - k - 1$ свободных коэффициентов. Данные ограничения дают нам $n + (n-2) \cdot k = (k+1)n - 2k$ уравнений. Чтобы получить еще $k-1$ уравнений, нужны дополнительные условия. Чем больше k, тем тяжелей. Поэтому обычно дальше $k = 3$ не идут.

B–сплайн

Базисные сплайны менее подвержены влиянию изменения отдельных точек данных (изменение одной вершины B–сплайна степени k ведет к изменению лишь $k+1$ соседних сплайнов). При этом, однако, теряются точные интерполяционные свойства: $p_n(x_n) \neq f(x_n) \Longrightarrow$ снижается влияние шумов (B–сплайн проходит только через первый и последний узлы, повышаем степень — улучшаем сглаживание данных). Количество узлов: $n \geq k+1$.

Сплайны Акимы

Дают меньшие осцилляции.


B
Spline interp of B
B-Spline interp of B
Akima spline interp of B
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1
0
1

Спасибо за внимание!

mailto

eddy@sao.ru
edward.emelianoff@gmail.com