Компьютерная обработка результатов измерений

Лекция 5. Системы уравнений

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН
Лаборатория обеспечения наблюдений

29 сентября 2016 года

1. Системы уравнений
2. Степенные уравнения
3. Численное интегрирование и дифференцирование
4. Дифференциальные уравнения

Системы уравнений

Система линейных уравнений для n неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2; \\ \qquad\qquad \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Если существует вектор–столбец $\mathbf{x}$, обращающий выражение $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ в тождество, говорят, что $\mathbf{x}$ является **решением** данной системы уравнений. $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Методы решений

$\delta = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$. Приближенные методы: $\min(\delta)$. Точные методы: $\delta = 0$.

Метод простой итерации

$\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{Bx}_n + \mathbf{c}$.
Сложностью метода простой итерации при решении матриц больших размерностей является особое свойство таких матриц — существование *почти собственных значений*, λ: $||\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x}|| \leq \epsilon||\mathbf{x}||$ при $||\mathbf{x}|| \neq 0$.

Матричный метод

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Методы решений

Метод Гаусса

$$\mathbf{A}_d\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Прямой ход — преобразование к диагональной форме:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mm} & \beta_m \end{array}\right).$$

Обратный ход — последовательное нахождение $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$.
$N \propto n^3$ — прямой, $N \propto n^2$ — обратный ход.

Методы решений

Метод Зейделя:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_n = \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{x}_{n+1} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Методы решений

Если $\mathbf{A}$ содержит m строк и n столбцов, то:

- $m = n$ квадратная матрица, возможно существование точного решения;
- $m < n$ недоопределенная система, решение возможно лишь в общем виде с по крайней мере $n - m$ свободных коэффициентов;
- $m > n$ переопределенная система, приближенное решение которой находится при помощи метода наименьших квадратов (в случае линейной зависимости строк данной системы может существовать и точное решение).

Приближенные решения

МНК ($\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$), псевдообратная матрица, ...

Степенные уравнения

Степенное уравнение имеет вид $p_n(x) = 0$, где $p_n(x)$ – полином n -й степени вида $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n x^n$.

Методы решения

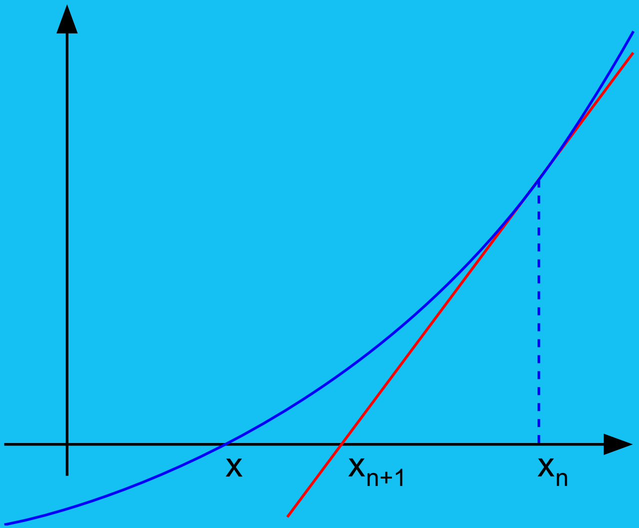
Точные — до третьей степени включительно (в общем случае) и итерационные:

бисекция деление пополам отрезка, где находится корень;

метод хорд замена полинома хордой, проходящей через точки $(x_1, p_n(x_1))$ и $(x_2, p_n(x_2))$;

метод Ньютона имеет быструю сходимость, но требует знакопостоянства $f'(x)$ и $f''(x)$ на выбранном интервале (x_1, x_2).

Метод Ньютона



Численное интегрирование и дифференцирование

Численное интегрирование

Для численного решения уравнения $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ наиболее популярны:

метод прямоугольников $I \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)[x_i - x_{i-1}]$;

метод трапеций $I \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}[x_i - x_{i-1}]$;

метод Симпсона $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\bigl(f(-1) + 4f(0) + f(1)\bigr) \Longrightarrow$

$$I \approx \frac{b-a}{6n}\Bigl(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})\Bigr).$$

и многие другие.

Численное интегрирование и дифференцирование

Численное дифференцирование

Аппроксимация функции интерполяционным многочленом (Ньютона, Стирлинга и т.п.), разделенные разности.
В нулевом приближении можно заменить производную $f^{(n)}$ разделенной разностью n-го порядка:

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) порядка n задаются в виде функции $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Разделение переменных:

$$y' = f(x, y) \Longrightarrow \phi(y)\,dy = \psi(x)\,dx \Longrightarrow y = y_0 + \int\limits_0^x \psi(x)\,dx.$$

ОДУ второго порядка:

$$Ay'' + By' + Cy + Dx = 0.$$

Если $D \equiv 0$, а множители A, B и C — константы, имеем однородное ОДУ. $y = \mathfrak{C}_1 \exp(k_1 x) + \mathfrak{C}_2 \exp(k_2 x)$, где k_1 и k_2 – корни *характеристического уравнения* $Ak^2 + Bk + C = 0$.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения в частных производных (ЧДУ) для функции $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ имеют вид

$$f(y, x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \ldots; \cdots; \frac{\partial^m y}{\partial x_1^m}, \ldots) = 0.$$

Однако, наиболее часто встречаются ЧДУ первого порядка для функции двух переменных $z = z(x, y)$ вида

$$f(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0.$$

Дифференциальные уравнения

Нелинейные дифференциальные уравнения содержат некоторые производные функции y не как простые множители, а как аргументы функций (чаще всего — степенных), например: $(y'')^3 - \sin y' = \operatorname{tg}(xy)$. Обычные физические задачи никогда не приводят к таким уравнениям, однако, и их решения вполне можно найти при помощи численных методов.

Методы решения

Рунге–Кутты, Эйлера, Адамса, конечных разностей и т.п.
Дифференциальные уравнения высших порядков сводят путем замены переменных к системе ОДУ первого порядка.

Спасибо за внимание!

mailto

eddy@sao.ru
edward.emelianoff@gmail.com