

Задания для самостоятельной работы по дисциплине «Компьютерная обработка результатов измерений»

Емельянов Эдуард Владимирович

2021-04-06

Внимание! Во всех заданиях вместо \mathfrak{N} необходимо вставить число, соответствующее номеру вашего варианта.

Для решения заданий может использоваться любая привычная вам среда обработки данных. В качестве отчета требуется предоставить архив с исходным файлом в формате L^AT_EX и сопутствующими файлами (графика, собственный стилевой файл и т.п.). В отчете привести полученные графики, изображения и численные результаты, при необходимости сделать краткий вывод.

1 Статистика и вероятность. Случайные величины и распределения

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & \mathfrak{N} & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 5 & \mathfrak{N} & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите определители исходных и получившихся матриц (команда `det(A)`).

2. Получите сигнал с амплитудной модуляцией (из примера). Добавьте к нему гауссов белый шум с SNR $15 + 5 \cdot \mathfrak{N}$ дБ. Постройте отдельно графики всех полученных сигналов.

Для полученного сигнала найдите следующие характеристики: математическое ожидание (`mean`), среднее квадратичное отклонение (`std`), медиану (`median`) и моду (`mode`). Найдите аналогичные величины для разности между зашумленным и оригинальным сигналом. Сравните полученные величины с теоретическими.

2 Теория физических измерений. Систематические и случайные погрешности

1. Известно, что некоторая зависимость (см. таблицу ниже) имеет вид $y = ax \sin(x) - b \ln(x)$. Определите коэффициенты a и b и постройте данную кривую с более детальным отображением (на векторе $[1:0.05:10]$). Подсказка: сразу же задайте вектора x и y как столбцы; матрица X задается командой $X=[x.*\sin(x) \ -\log(x)]$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-0.68	8.41	-23.0	-37.2	-73.2	-39.7	9.14	21.0	7.97	-72.5

$(a = 7.72, b = 14.8)$.

2. Промоделируйте эксперимент измерения ста значений функции $y = 3x^3 + 3.4x^2 - 1.1\ln x + 9.2$ и восстановления коэффициентов зависимости. Для этого создайте вектор аргумента $x=[1:100]$, получите по формуле соответствующий вектор функции y_{ideal} , а из него — зашумленный результат y с SNR=25 дБ.

Методом `polyfit` — `polyval` получите значения коэффициентов. Отобразите на графике точками исходные данные и непрерывной линией полученный аппроксимацией результат.

3. Аналогично предыдущему заданию составьте модель эксперимента по измерению амплитуды напряжения в контуре, испытывающем колебания с основной частотой $\Omega = 1000$ Гц и двумя гармониками $\Omega \pm \omega$, где $\omega = 74$ Гц. Известно, что суммарное колебание описывается приближенной формулой $U = 100\sin(\Omega t) + 50\sin(\omega t) - 33\cos(\omega t)$. Создайте интервал времен $t=[0: 0.06: 120]$. Для получения идеальных значений U положите $a = 361, b = 117, c = 92$. Отношение сигнал/шум при получении зашумленного сигнала выберите равным 20 дБ.

Восстановите значения коэффициентов a, b и c .

3 Теория оценок

1. Определите давление в цилиндре с газом, исходя из закона Менделеева–Клапейрона: $pV = mRT/\mu$, если известно, что масса газа $m = 2\text{ грамм}$, $\mu = 29\text{ г/моль}$, $R = 8.31$, а объем и температуру газа измеряли в течение минуты, получив следующие значения:

Величина	Значение									
	$V, \text{ л}$	2.27	2.27	2.26	2.25	2.26	2.27	2.29	2.28	2.25
$T, \text{ К}$	399.4	399.1	399.3	396.8	399.5	400.2	400.6	403.0	399.2	401.3

3 Теория оценок

Считайте, что за это время давление газа не успело сколь-нибудь значительно измениться. Определите погрешности измерения величин V и T . Считая, что остальные величины являются постоянными, определите косвенную погрешность измерения p .

Для удобства вычислений *создайте скрипт, позволяющий для заданного ряда данных получить математическое ожидание, среднеквадратичное отклонение и относительную ошибку.*

Запишите результат в виде $p = \bar{p} \pm \sigma_p$.

2. Для определения емкости C неизвестного конденсатора при помощи осциллографа исследовали затухающий импульс, возникающий при разрядке конденсатора через резистор $R = \mathfrak{N}$ кОм. По показаниям осциллографа были записаны следующие значения тока:

$t, \text{ с}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$I, \text{ А}$	1.00	0.72	0.52	0.37	0.26	0.19	0.14	0.10	0.07	0.04	0.03

Известно, что погрешность считывания значений тока с экрана осциллографа составляет $\sigma_I = (0.01/\mathfrak{N})$ А. Кроме того, известно что сопротивление резистора известно с точностью 5%. Из формулы $I = I_0 \exp(-t/[RC])$ определите погрешность измерения емкости конденсатора.

Методом наименьших квадратов определите значение емкости конденсатора, исходя из уравнения $t = -RC \ln I$ (составьте матрицу $\mathbf{X} = -R \cdot \log(I')$ и найдите решение: $\mathbf{C} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}$. Запишите ответ в виде $C = \bar{C} \pm \sigma_C$.

Для увеличения точности эксперимента было проведено еще одно измерение, результаты которого несколько отличались от предыдущих:

$t, \text{ с}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$I, \text{ А}$	1.00	0.75	0.56	0.41	0.30	0.23	0.17	0.12	0.10	0.07	0.05

Проверьте нулевую гипотезу о равенстве средних в обоих опытах. Определите величину емкости во втором случае.

Столь большое различие емкостей, полученных в результате двух независимых экспериментов, заставило предположить, что в результате длительной эксплуатации резистор R нагрелся, что вызвало увеличение его сопротивления. Считая емкость конденсатора прежней, определите сопротивление резистора во втором случае.

4 Системы линейных уравнений. Степенные уравнения. Дифференциальные уравнения

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \mathfrak{N}; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2; \\ x_1 - 3x_2 + \mathfrak{N}x_3 = 3. \end{cases}$$

2. Решите (аналитически) уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Найдите решение этого уравнения при $a = \mathfrak{N}$, $b = 2$, $c = 3$ двумя способами: при помощи функции `subs` и функции `roots`.

3. Найдите решение уравнения

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = \mathfrak{N}$. Попробуйте решить, используя преобразования Лапласа.

5 Анализ временных рядов. Фурье и вейвлет-анализ

- Затабулируйте функцию $y = 10^x$ на отрезке $[2, 4]$ с шагом 0.05. Вычислите теперь при помощи этой таблицы значение произведения $X = 1097 \cdot (2500 + 100\mathfrak{N})$ (воспользуйтесь свойством логарифмов). Для нахождения значений $\ln 1097$ и $\ln 1013$ воспользуйтесь аппроксимацией сплайнами. Аналогично, при помощи аппроксимации сплайнами вычислите X .
- Создайте вектор-сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с $\nu_1 = (50 + \mathfrak{N})$ Гц и $\nu_2 = (170 - 2\mathfrak{N})$ Гц на промежутке $t \in [0, 0.25]$ с с периодом дискретизации 0.001 с. Добавьте к нему аддитивного нормального шума:

$$y = y + 2*randn(size(t));$$

Постройте спектр итогового сигнала, определите по спектру частоты исходных сигналов.
- Создайте зашумленную копию лабораторного сигнала с $S/N = -10$ дБ. Выделите полезный сигнал при помощи вейвлет-фильтрации (подходящий базис подберите самостоятельно).

6 Обработка изображений

1. Для пробного изображения постройте преобразования методом эквализации гистограммы с функциональными зависимостями для функции $f(x)$ ($x = [1:256]$).
Значения $f(x)$ по вариантам: $\sin(x)$ (1, 6), $\cos(x)$ (2, 7), $\exp(x)$ (3, 8), $\ln(x)$ (4, 9), $\exp(-x^2)$ (5, 10).
2. Создайте изображение шахматной доски с размером ячейки 20×20 пикселей. Смажьте изображение на $2\mathfrak{N}$ точек под углом 45° . Добавьте гауссова шума с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением 0.01. Отфильтруйте изображение при помощи простого винеровского фильтра и винеровского фильтра с учетом автокорреляционных функций. Сравните результаты.
3. Для пробного изображения постройте маску, выделяющую протяженные объекты (туманности, ядра галактик и скоплений) при помощи морфологических преобразований. Определите количество найденных объектов методом поиска 8-связных областей. Умножьте исходное изображение на маску и сохраните результат.
4. Постройте фильтр лапласиана 50×50 пикселей с полушириной \mathfrak{N} пикселей. Сравните производительность свертки пробного изображения с этим фильтром непосредственной реализацией свертки и реализацией свертки через преобразование Фурье.
Примените к пробному изображению наиболее подходящий с вашей точки зрения фильтр в частотной области для улучшения его визуализации.