

# Компьютерная обработка результатов измерений

## Лекция 7.2. Обработка изображений

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН  
Лаборатория обеспечения наблюдений

1 апреля 2021 года

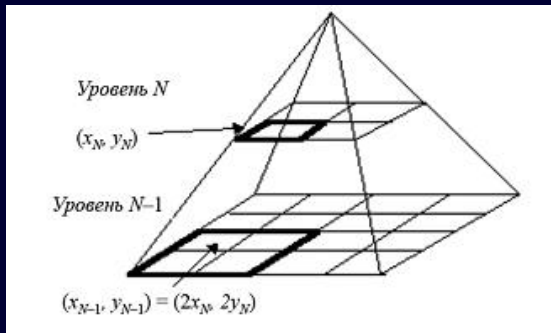


1 Вейвлеты

2 Морфологические операции

3 Сегментация изображений

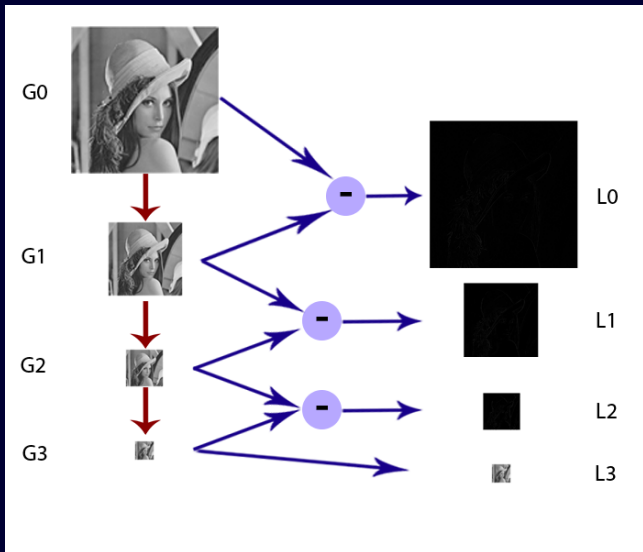




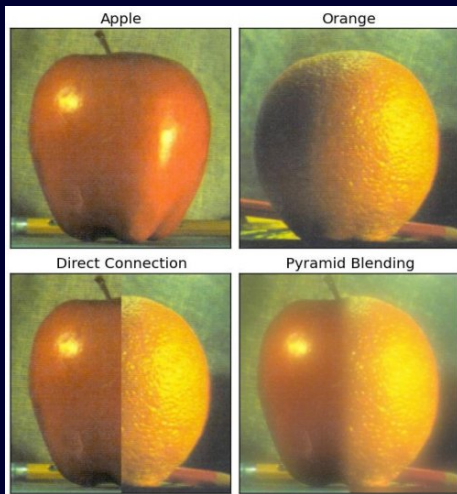
## Пирамида изображений

Пирамида приближений (аппроксимирующие коэффициенты), пирамида ошибок (детализирующие коэффициенты). Пирамида Лапласа (только пирамида ошибок, компрессия); гауссова пирамида (только приближения, синтез текстур).

# Вейвлеты







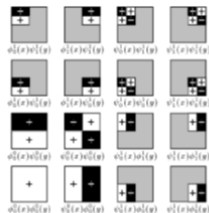
Объединение пирамид Лапласа.



## 2D Haar mother basis functions



## Non-standard Haar basis functions for 4x4 image



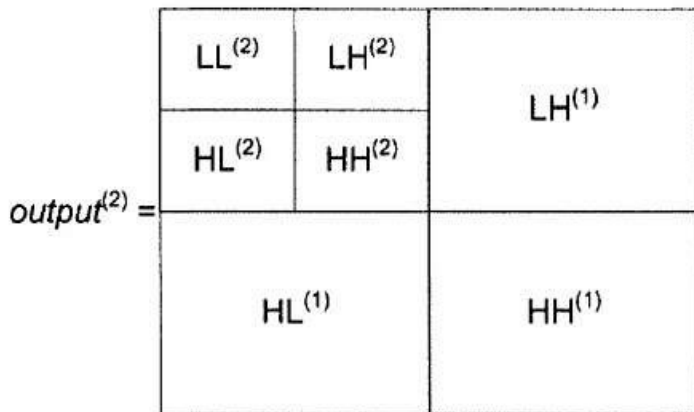
Sample images from Wavelets for Computer Graphics: A Primer [1]

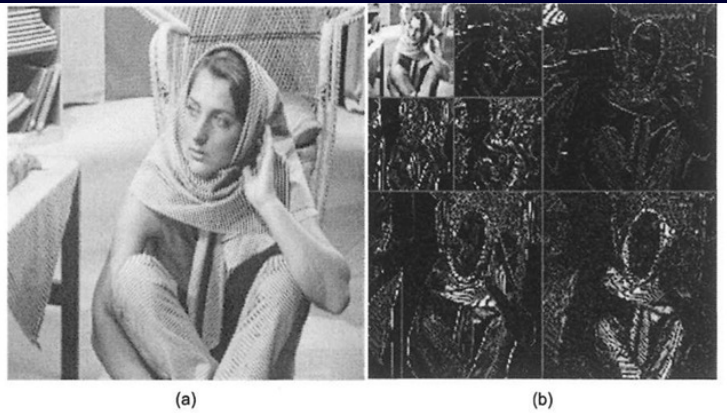


$output^{(1)} =$

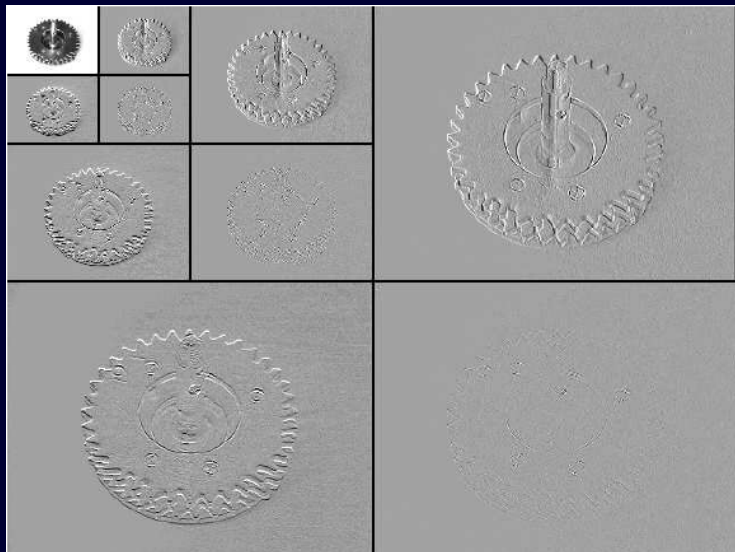
|            |            |
|------------|------------|
| $LL^{(1)}$ | $LH^{(1)}$ |
| $HL^{(1)}$ | $HH^{(1)}$ |



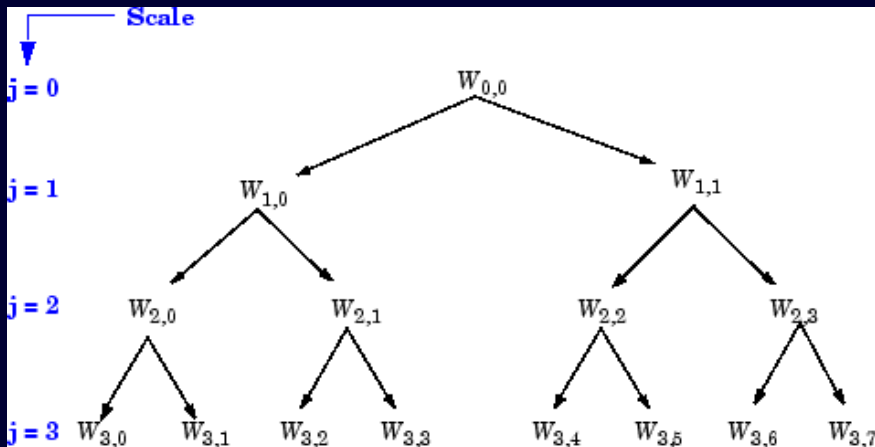




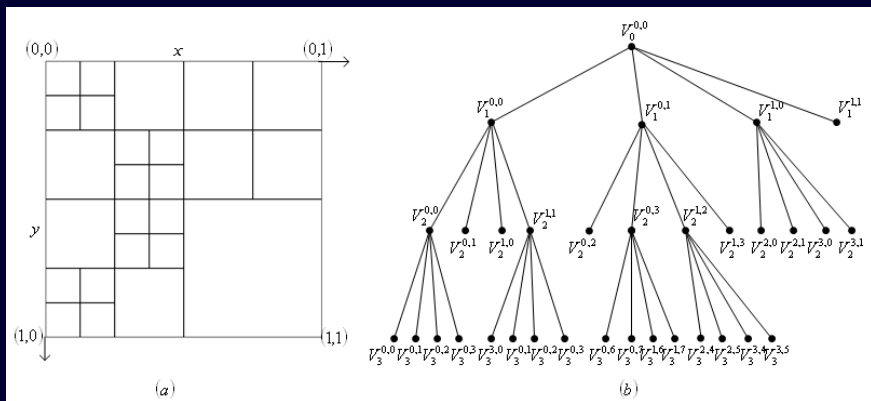
# Вейвлеты



# Пакеты вейвлетов

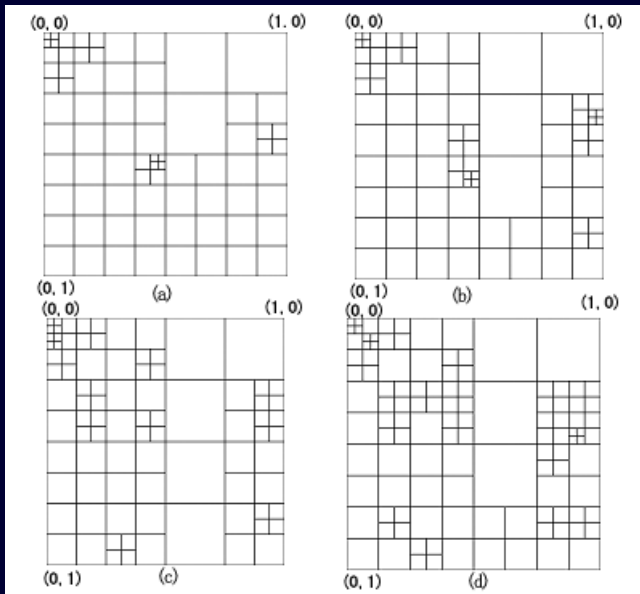


# Пакеты вейвлетов

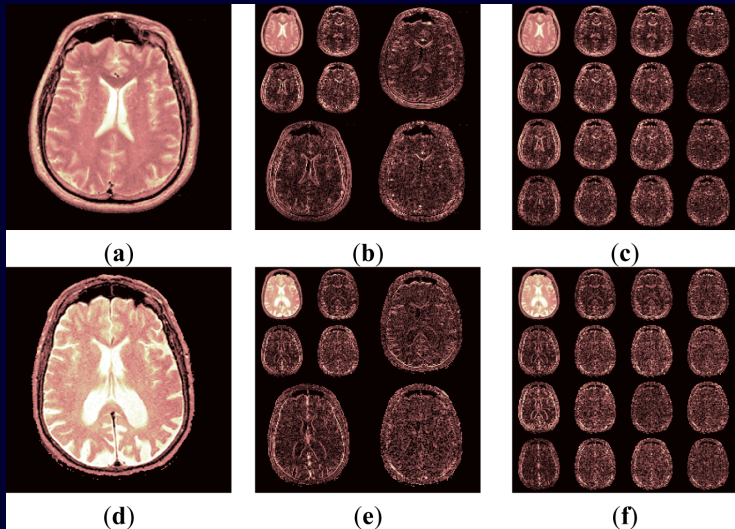




# Пакеты вейвлетов



# Пакеты вейвлетов



(a) normal brain; (b) 2-level DWT of normal brain; (c) 2-level DWPT of normal brain; (d) AD brain; (e) 2-level DWT of AD brain; (f) 2-level DWPT of AD brain.



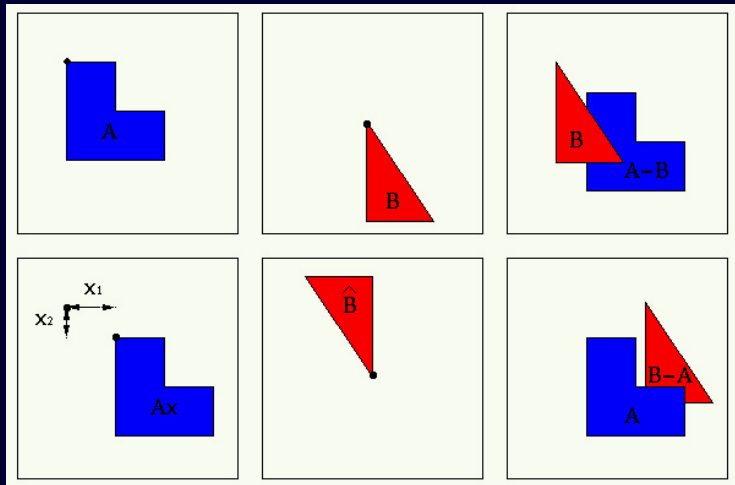
# Морфологические операции

## Основные понятия

- Пусть  $A$  – некоторая область на бинарном изображении,  $a = (a_1, a_2) \in A$  – точка, ей принадлежащая; интенсивность в точке  $a$  обозначим как  $v(a)$ .
- **Объект:**  $A = \{a \mid v(a) == 1, \forall a \text{ 4/8-connected}\}$ .
- **Фон:**  $B = \{b \mid b == 0 \cup b \text{ not connected}\}$ .
- **Сдвиг:**  $A_x = \{c \mid c = a + x, \forall a \in A\}$ .
- **Отражение:**  $\hat{A} = \{c \mid c = -a, \forall a \in A\}$ .
- **Дополнение:**  $A^C = \{c \mid c \notin A\}$ .
- **Сумма:**  $A + B = \{c \mid c \in (A \cup B)\} = A \cup B$ .
- **Разность:**  $A - B = \{c \mid c \in A, c \notin B\} = A \cap B^C$ .

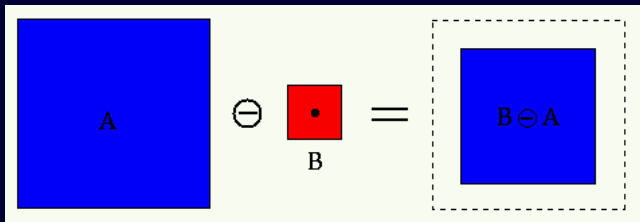


# Морфологические операции



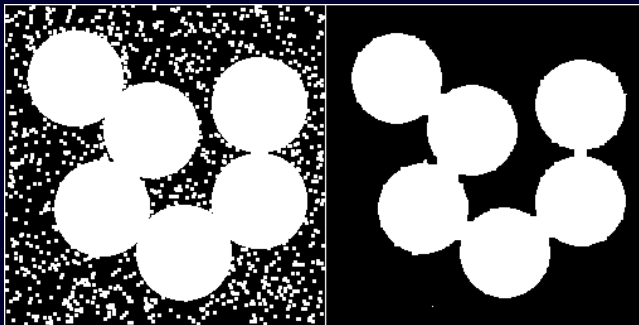
# Эрозия (усечение)

$$A \ominus B = \{x \mid B_x \subseteq A\} \text{ или } A \ominus B = \{x \mid B_x \cap A^C = \emptyset\} \text{ или } A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b$$



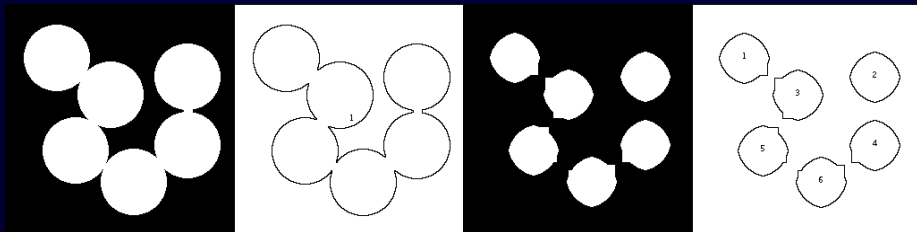
# Эрозия (усечение)

$$A \ominus B = \{x \mid B_x \subseteq A\} \text{ или } A \ominus B = \{x \mid B_x \cap A^C = \emptyset\} \text{ или } A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b$$



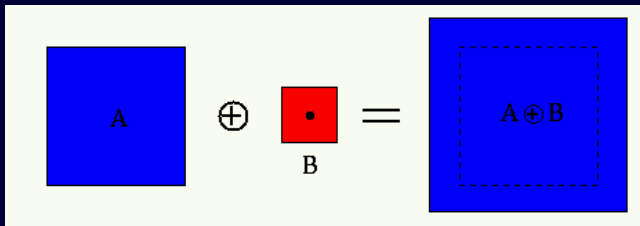
# Эрозия (усечение)

$$A \ominus B = \{x \mid B_x \subseteq A\} \text{ или } A \ominus B = \{x \mid B_x \cap A^C = \emptyset\} \text{ или } A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b$$



# Дилатация (наращивание)

$$A \oplus B = \{x \mid \hat{B}_z \cap A \neq \emptyset\} \text{ или } A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b = \bigcup_{a \in A} B_a$$





# Дилатация (наращивание)

$$A \oplus B = \{x \mid \hat{B}_z \cap A \neq \emptyset\} \text{ или } A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b = \bigcup_{a \in A} B_a$$

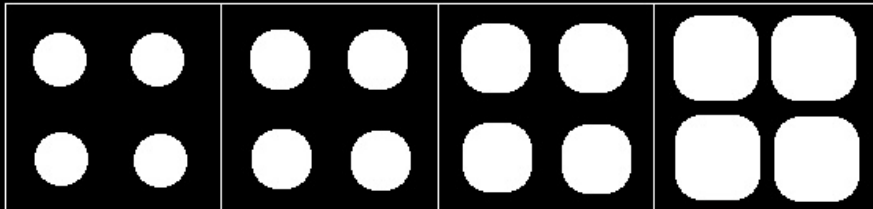
## Dilation

Original

2

5

10



Коммутативность:

$$A \oplus B = B \oplus A \quad A \ominus B \neq B \ominus A$$

Ассоциативность:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \quad A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$$

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

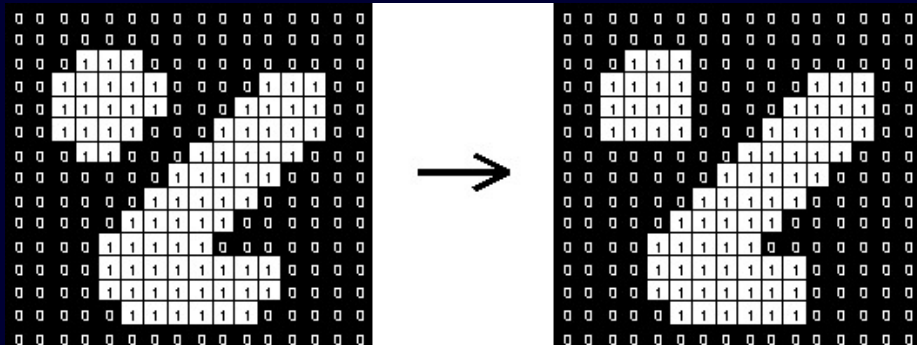
Двойственность:

$$(A \ominus B)^C = A^C \oplus \hat{B} \quad (A \oplus B)^C = A^C \ominus \hat{B}$$



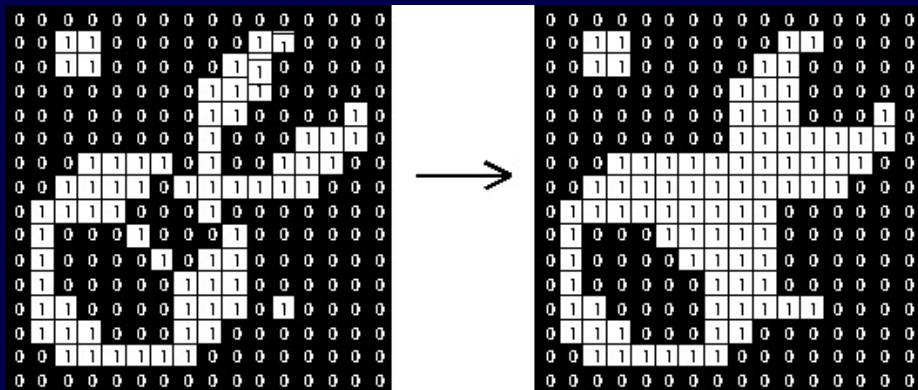
# Открытие (размыкание)

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

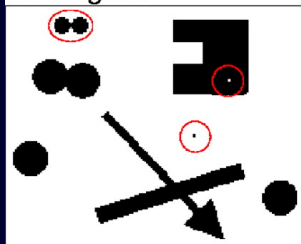


# Заккрытие (замыкание)

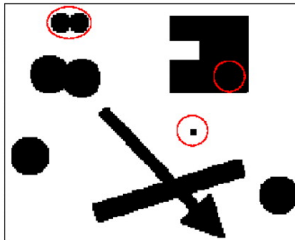
$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



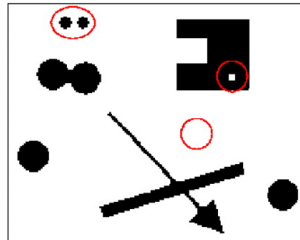
**A** Original



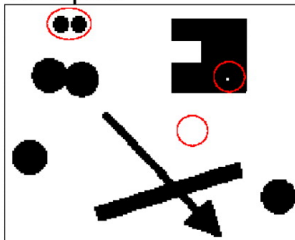
**B** Dilate



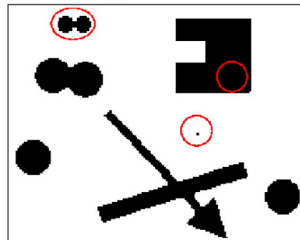
**C** Erode



**D** Open

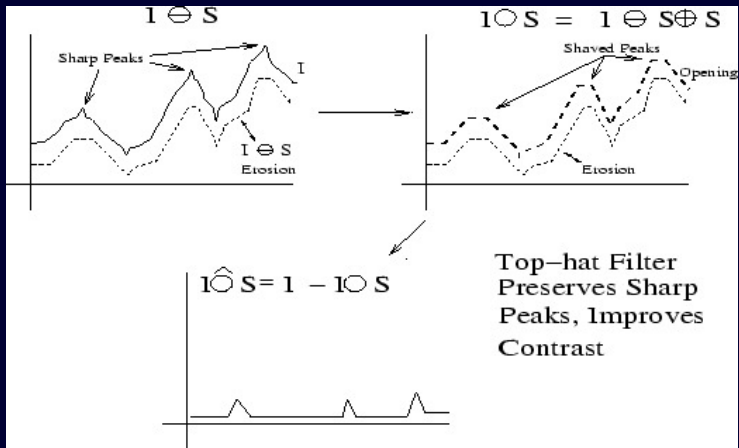


**E** Close



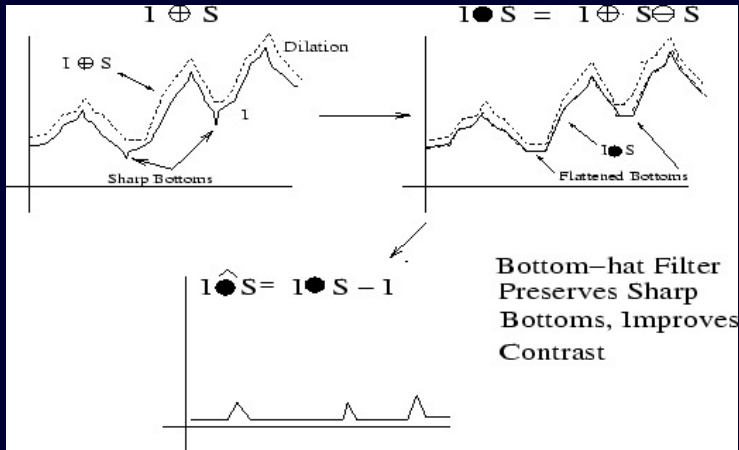
# «Top hat» и «Bottom hat»

$$A \hat{=} B = A \setminus (A \circ B), \quad A \bullet B = (A \bullet B) \setminus A$$



# «Top hat» и «Bottom hat»

$$A \hat{=} B = A \setminus (A \circ B), \quad A \bullet B = (A \bullet B) \setminus A$$



# Hit-and-miss

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^C \ominus B_2), \quad \text{где}$$

$$B_1 = \{b \mid b \in B, b = 1\}, \quad B_2 = \{\tilde{b} \mid b \in B, b = 0\}$$

|   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |
|---|---|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|
|   | 1 |   |  |   | 1 |   |  |   | 0 | 0 |  |   | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |  | 1 | 1 | 0 |  | 0 | 1 | 1 |  |
| 0 | 0 |   |  |   | 0 | 0 |  |   | 1 |   |  |   | 1 |   |  |

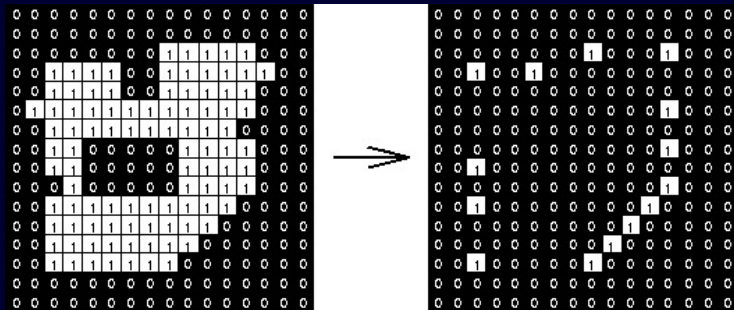




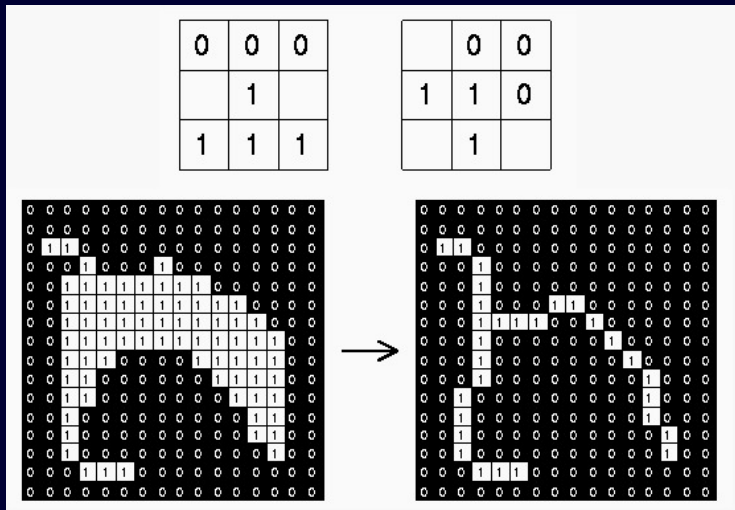
# Hit-and-miss

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^C \ominus B_2), \quad \text{где}$$

$$B_1 = \{b \mid b \in B, b = 1\}, \quad B_2 = \{\tilde{b} \mid b \in B, b = 0\}$$



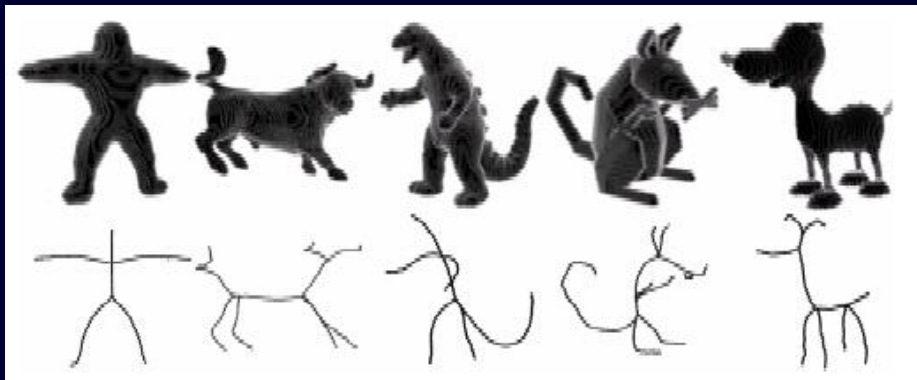
# Hit-and-miss



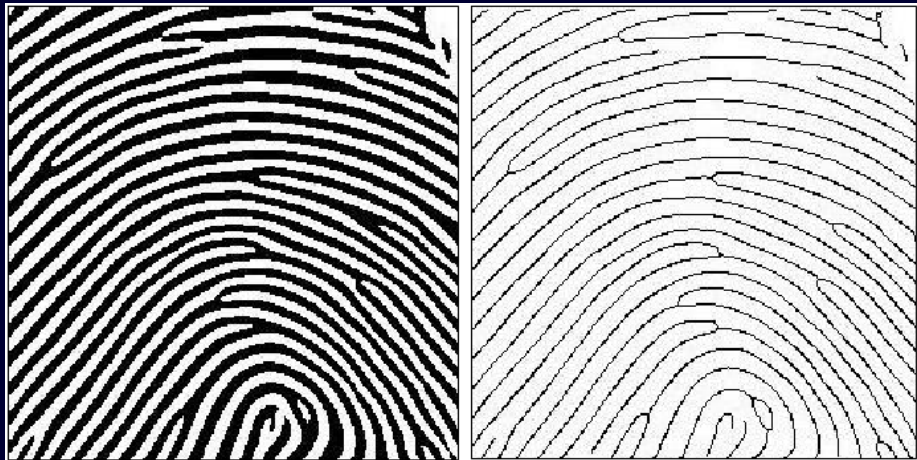
$$S = A \setminus \bigcup_i (A \circledast B_i)$$



# Hit-and-miss



# Hit-and-miss



# Сегментация изображений

## Основы

- Сегментация:  $\cup_{i=1}^n R_i \cup \cup_{i=1}^n B_i = R$ , все  $R_i$  связные,  $B_i$  – фон.
- $R_i \cap R_j = \emptyset \forall i \neq j$ .
- $Q(R_i) = 1, i = \overline{1, n}, Q$  – логический предикат.
- $Q(R_i \cup R_j) = 0 \forall i \neq j$ .

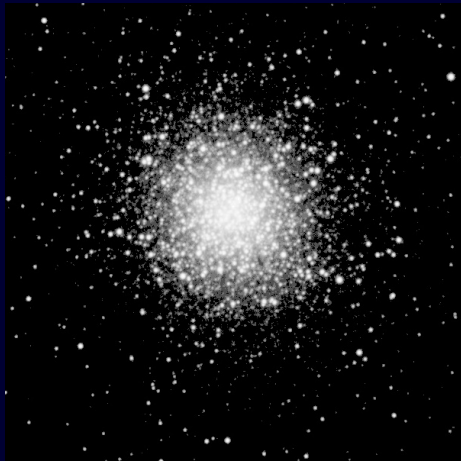
## Производные

- $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f'_x = f(x+1) - f(x)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_x = f'_x(x+1) - f'_x(x) = f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)$
- $\nabla^2 f(x, y) = f''_x(x, y) + f''_y(x, y) \Rightarrow$   
 $\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$



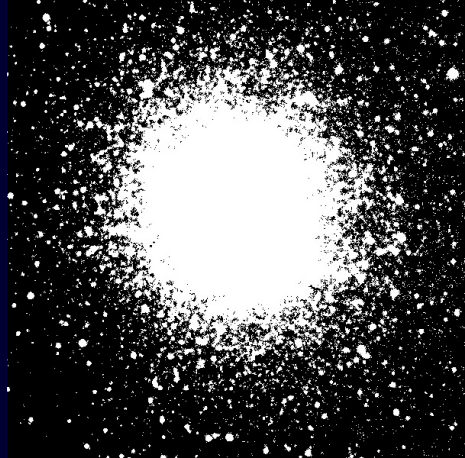
# Примеры (M13)

Оригинал:



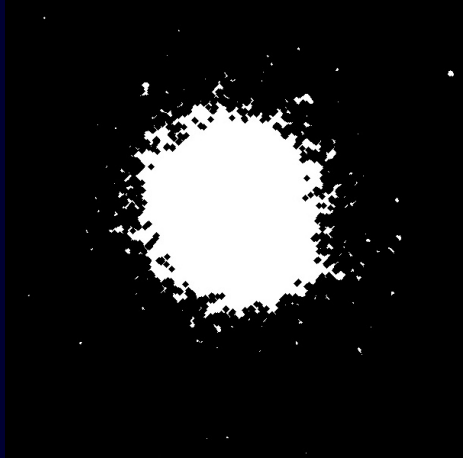
# Примеры (M13)

Бинаризация по постоянному порогу:



# Примеры (М13)

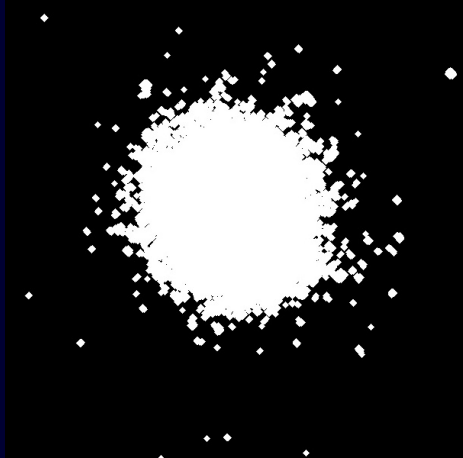
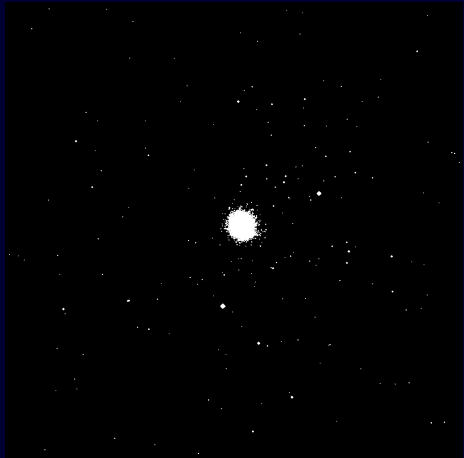
Четырехкратная эрозия:





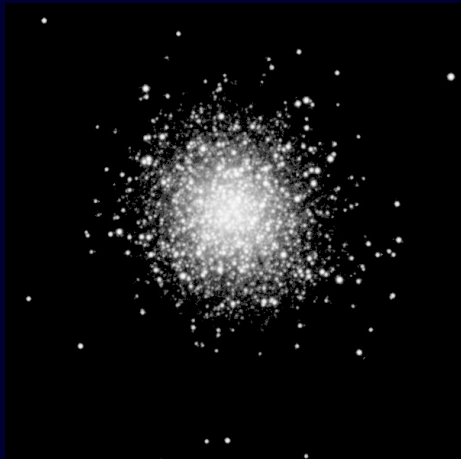
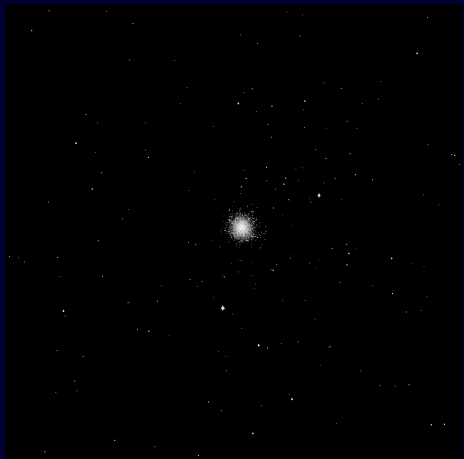
# Примеры (М13)

Четырехкратное размыкание:



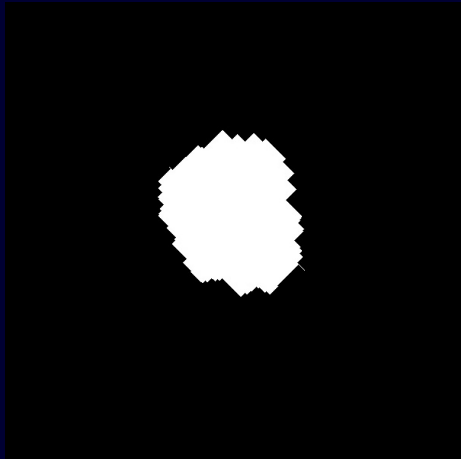
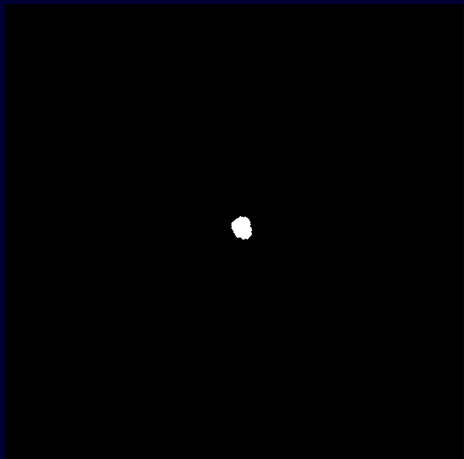
# Примеры (M13)

Оригинал с предыдущей маской:



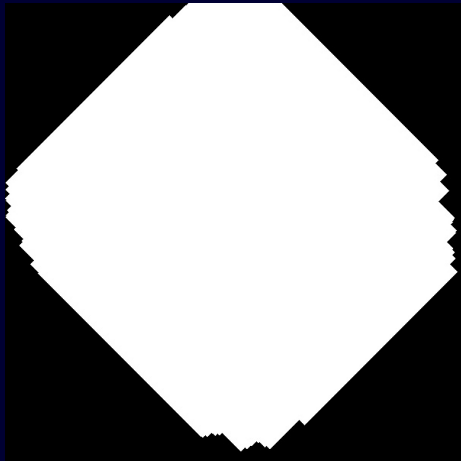
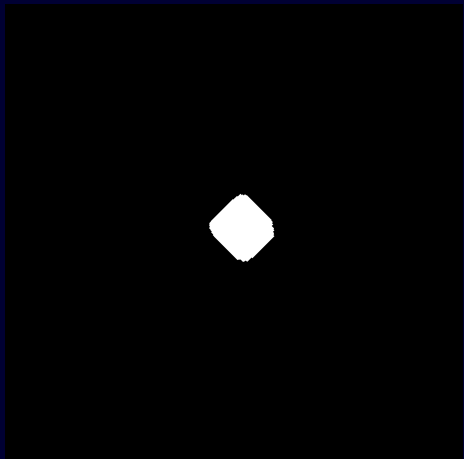
# Примеры (М13)

Двадцатипятикратная эрозия:



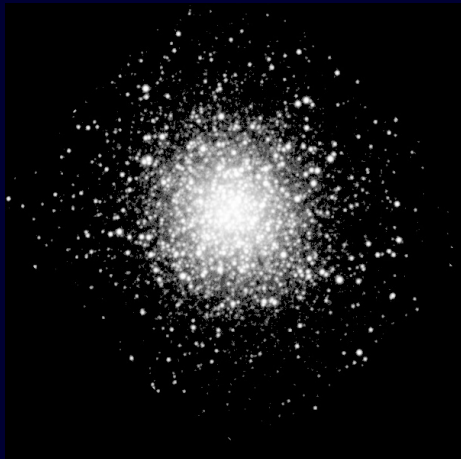
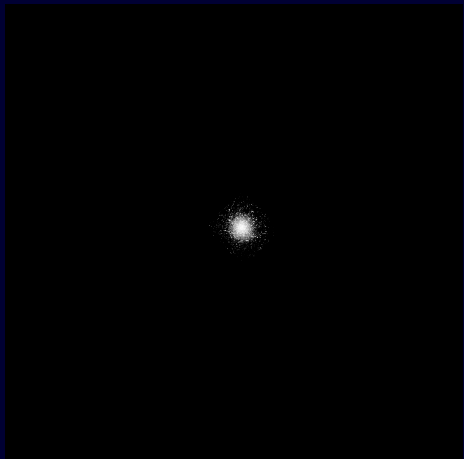
# Примеры (M13)

Маска (25 эрозий и 200 дилатаций):



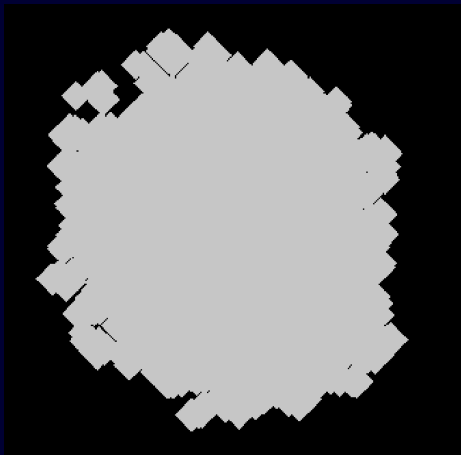
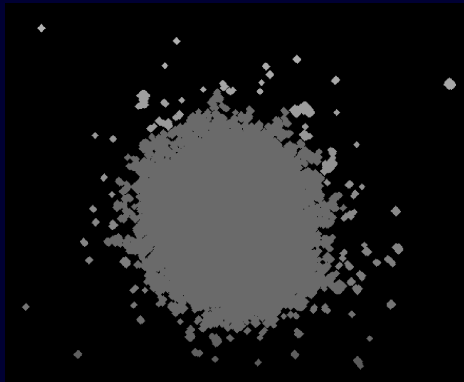
# Примеры (M13)

Оригинал с предыдущей маской:



# Примеры (M13)

Выделенные объекты (размыкание  $\times 4$  и  $\times 10$ ; 237 и 9 объектов в поле соответственно):



# Обнаружение линий, точек и перепадов

Точки — лапласиан, линии, перепады — градиент

|    |    |    |  |     |    |    |
|----|----|----|--|-----|----|----|
| -1 | +1 | +1 |  | +1  | +1 | +1 |
| -1 | -2 | +1 |  | -1  | -2 | +1 |
| -1 | +1 | +1 |  | -1  | -1 | +1 |
| 0° |    |    |  | 45° |    |    |

Prewitt



# Обнаружение линий, точек и перепадов

|          | $0^\circ$                                                                                                                                 | $45^\circ$ |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----|---|----|---|---|----|----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|----|---|---|----|----|----|
| Sobel    | <table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>   | -1         | 0  | 1 | -2 | 0 | 2 | -1 | 0  | 1 | <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table>   | 0  | 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | -2 | -1 | 0  |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -2       | 0                                                                                                                                         | 2          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| 0        | 1                                                                                                                                         | 2          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -2       | -1                                                                                                                                        | 0          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| Kirsch   | <table><tr><td>-3</td><td>-3</td><td>5</td></tr><tr><td>-3</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>-3</td><td>-3</td><td>5</td></tr></table> | -3         | -3 | 5 | -3 | 0 | 5 | -3 | -3 | 5 | <table><tr><td>-3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>-3</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>-3</td><td>-3</td><td>-3</td></tr></table> | -3 | 5 | 5 | -3 | 0 | 5 | -3 | -3 | -3 |
| -3       | -3                                                                                                                                        | 5          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -3       | 0                                                                                                                                         | 5          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -3       | -3                                                                                                                                        | 5          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -3       | 5                                                                                                                                         | 5          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -3       | 0                                                                                                                                         | 5          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -3       | -3                                                                                                                                        | -3         |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| Robinson | <table><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>   | -1         | 0  | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0  | 1 | <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table>   | 0  | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0  |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| 0        | 1                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | 0                                                                                                                                         | 1          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |
| -1       | -1                                                                                                                                        | 0          |    |   |    |   |   |    |    |   |                                                                                                                                           |    |   |   |    |   |   |    |    |    |

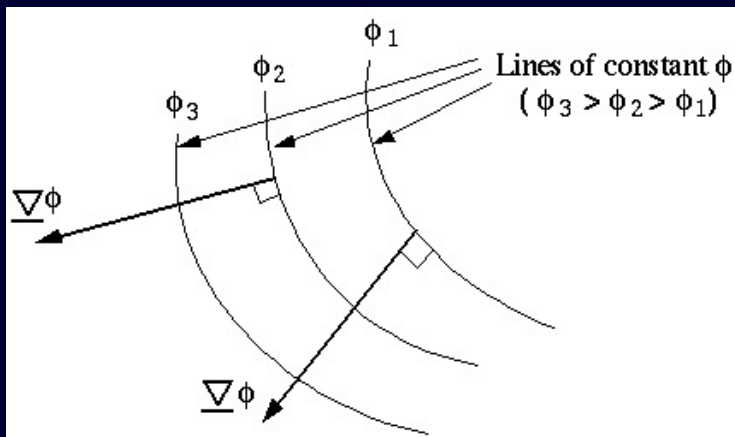




# Обнаружение линий, точек и перепадов

## Градиент

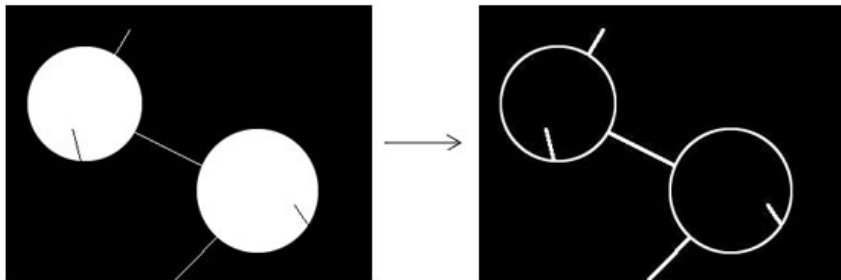
$$\nabla \vec{f} = (f'_x, f'_y) = (f(x+1, y) - f(x, y), f(x, y+1) - f(x, y))$$



# Выделение границ

## Морфологический градиент

$$\beta(A) = A \setminus (A \ominus B) \quad \beta'(A) = (A \oplus B) \setminus A \quad \beta''(A) = (A \oplus B) \setminus (A \ominus B)$$



Morphological Gradient



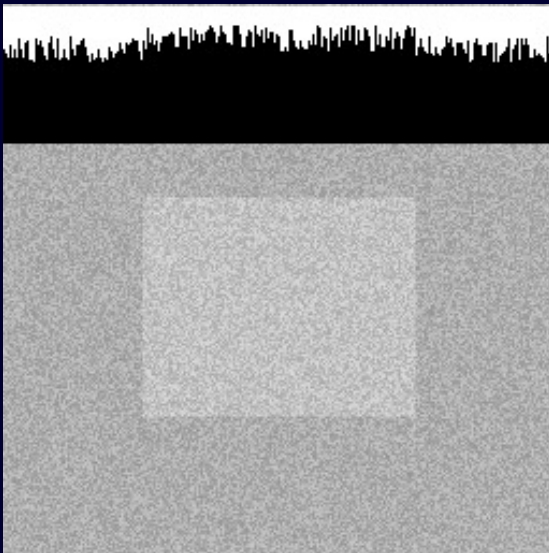
# Выделение границ

## Canny

- 1 Размывание изображения гауссовым фильтром.
- 2 Вычисление частных производных  $I'_x$  и  $I'_y$  (Робертс, Собель, Прюитт, LoG, DoG...) и компонентов градиента:  $M = \sqrt{(I'_x)^2 + (I'_y)^2}$ ,  
 $\theta = \arctg I'_y / I'_x$ .
- 3 Пороговое преобразование  $M$ :  $M_T = M$ , если  $M > T$ , иначе  $M_T = 0$ .
- 4 Обнуление немаксимальных  $M_T$  по направлению  $\theta$  (по двум соседям).
- 5 Получение двух пороговых значений:  $M_{T_1}$  и  $M_{T_2}$ ;  $T_1 < T_2$ .
- 6 Заполнение пропусков в  $M_{T_2}$  по соседним значениям в  $M_{T_1}$ .



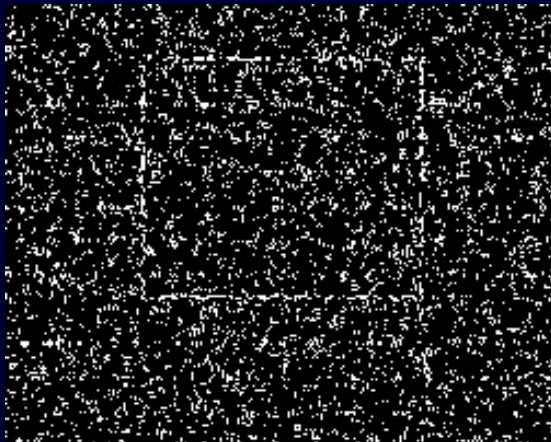
# Выделение границ



Образец



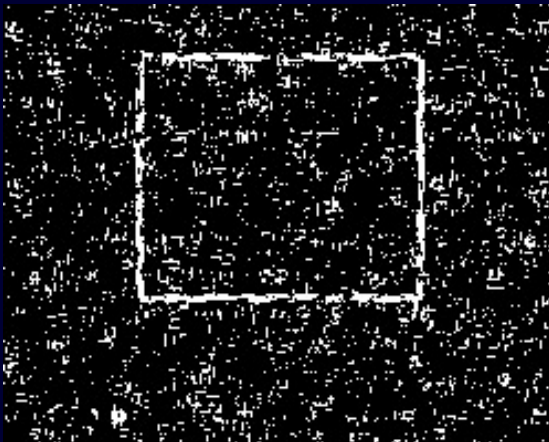
# Выделение границ



Sobel



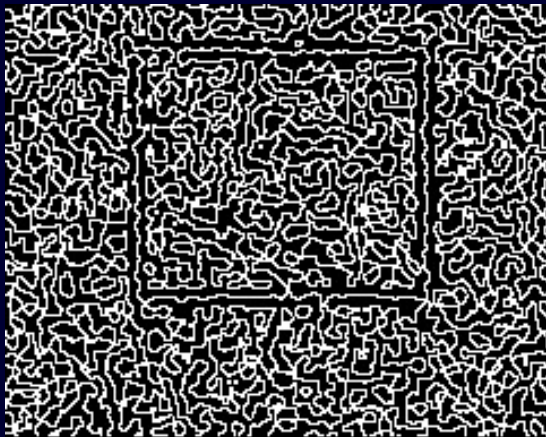
# Выделение границ



Prewitt



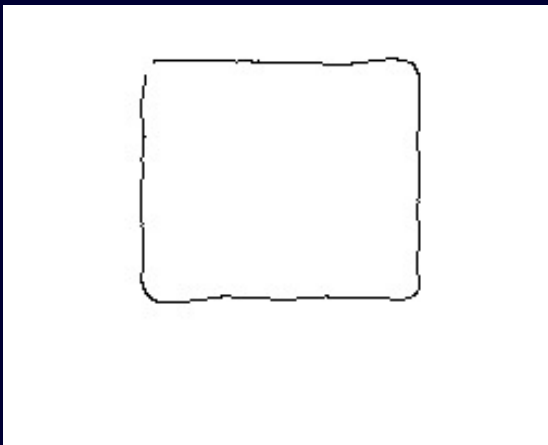
# Выделение границ



DoG



# Выделение границ



Canny,  $\sigma = 5$ ,  $T_1 = 0.8$ ,  $T_2 = 0.95$

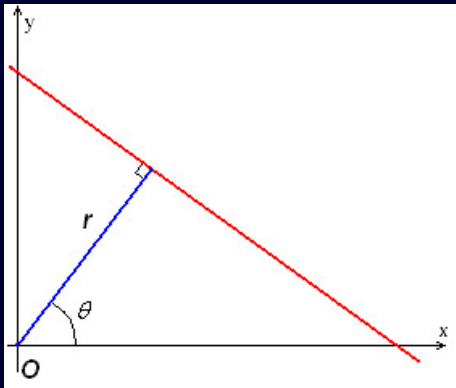




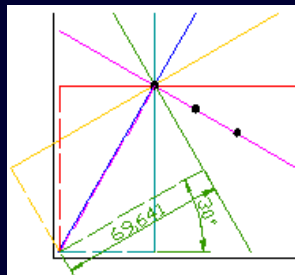
# Обнаружение прямых и окружностей

## Преобразование Хафа

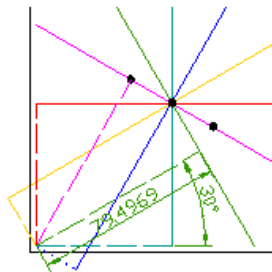
$$r = x \cos \theta + y \sin \theta$$



# Обнаружение прямых и окружностей



| Angle | Dist. |
|-------|-------|
| 0     | 40    |
| 30    | 69.6  |
| 60    | 81.2  |
| 90    | 70    |
| 120   | 40.6  |
| 150   | 0.4   |



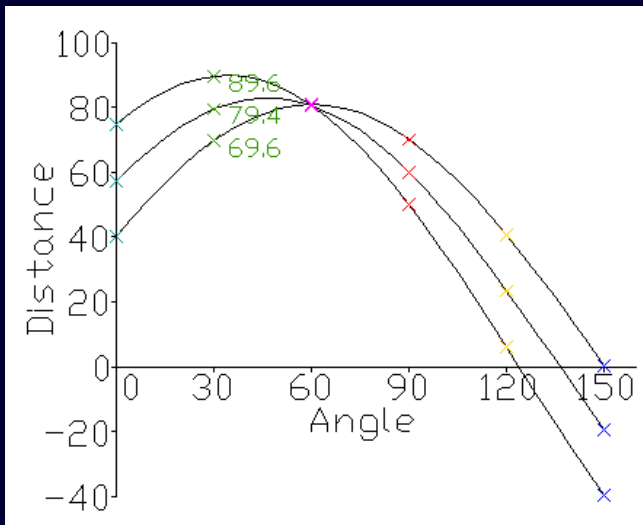
| Angle | Dist. |
|-------|-------|
| 0     | 57.1  |
| 30    | 79.5  |
| 60    | 80.5  |
| 90    | 60    |
| 120   | 23.4  |
| 150   | -19.5 |



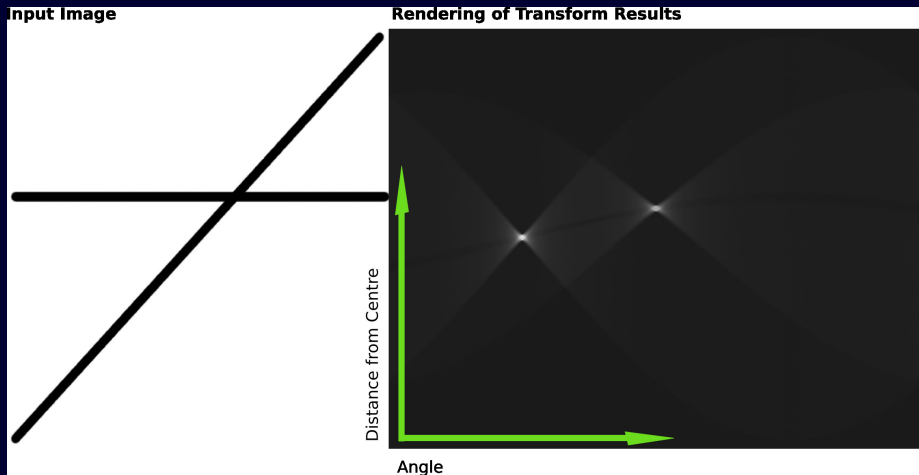
| Angle | Dist. |
|-------|-------|
| 0     | 74.6  |
| 30    | 89.6  |
| 60    | 80.6  |
| 90    | 50    |
| 120   | 6.0   |
| 150   | -39.6 |



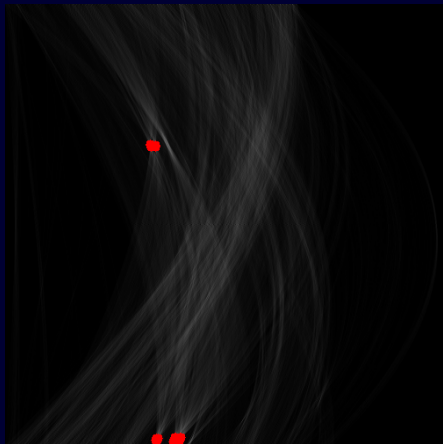
# Обнаружение прямых и окружностей



# Обнаружение прямых и окружностей



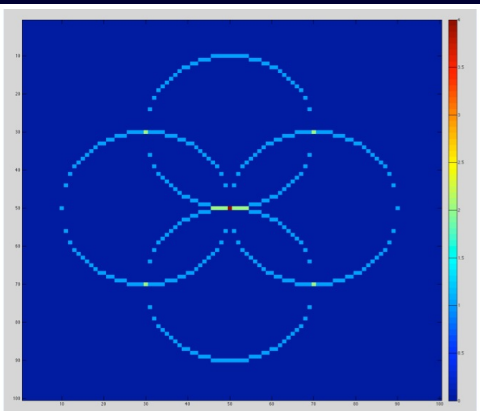
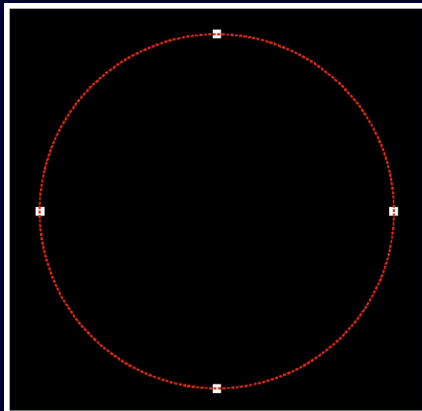
# Обнаружение прямых и окружностей



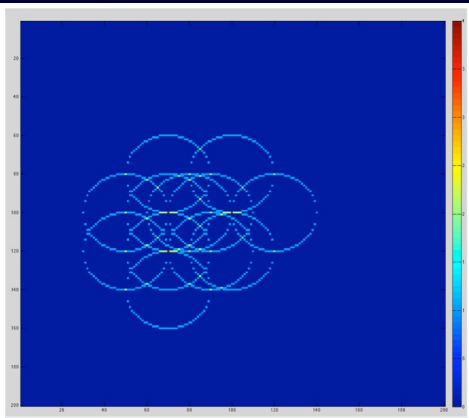
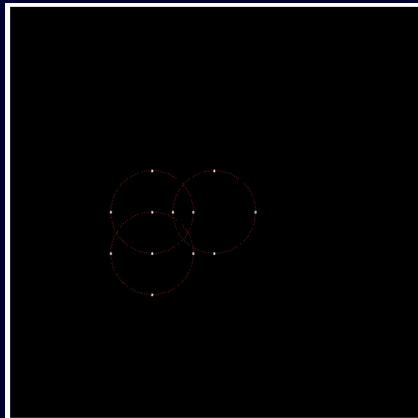
# Обнаружение прямых и окружностей

## Преобразование Хафа для поиска окружностей

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$



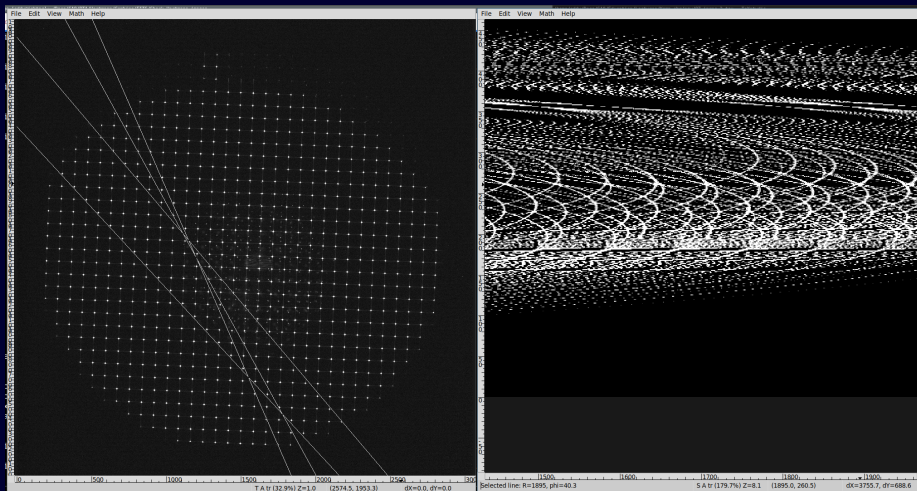
# Обнаружение прямых и окружностей



Трехмерный массив в случае неизвестных центра и радиуса.



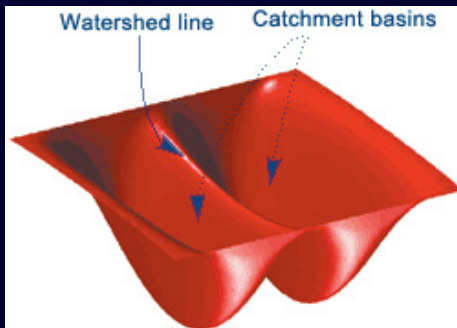
# Пример: датчик волнового фронта





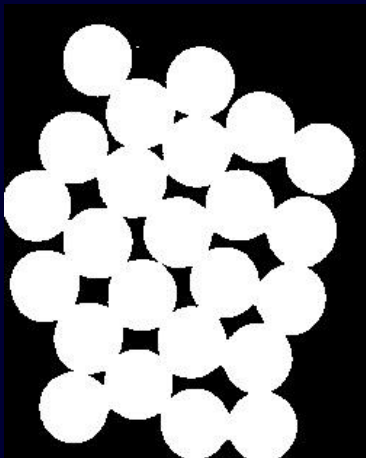
# Сегментация по морфологическим водоразделам

Бинарные изображения: итеративные дилатации с построением перегородок в местах образовавшихся пересечений.



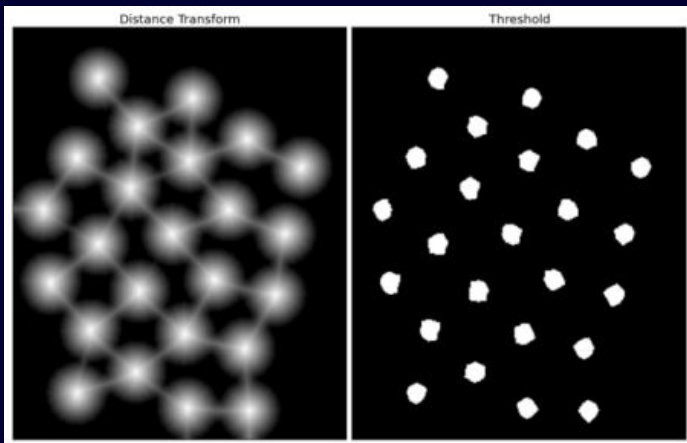
# Сегментация по морфологическим водоразделам

Бинарные изображения: преобразования расстояний



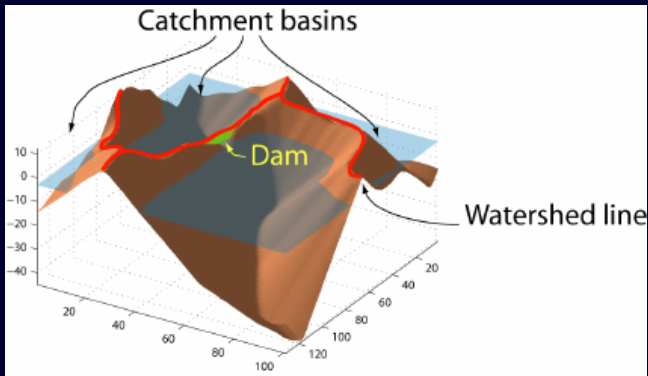
# Сегментация по морфологическим водоразделам

Бинарные изображения: преобразования расстояний



# Сегментация по морфологическим водоразделам

В общем случае: различные алгоритмы заполнения.



# Спасибо за внимание!

**mailto**

eddy@sao.ru

edward.emelianoff@gmail.com

## Литература

- Gonzalez & Woods. Digital Image Processing, 3rd edition. 2008.
- Gonzalez & Woods & Eddins. Digital Image Processing Using MATLAB, 2nd edition. 2009.
- [http://www.imageprocessingplace.com/root\\_files\\_V3/tutorials.htm](http://www.imageprocessingplace.com/root_files_V3/tutorials.htm)

