

Компьютерная обработка результатов измерений

Лекция 6. Обработка изображений, часть 1

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН
Лаборатория физики оптических транзиентов



- 1 Цифровые изображения
- 2 Математический аппарат
- 3 Пространственные и градационные преобразования
- 4 Частотные преобразования
- 5 Сигнал–шум



Цифровые изображения

Изображение представляет собой двумерную функцию $f(x, y)$, где x и y — пространственные координаты, а уровень f называется **интенсивностью** изображения в данной точке (цветное изображение является совокупностью по крайней мере трех функций $r(x, y)$, $g(x, y)$ и $b(x, y)$). Если величины x , y и f принимают дискретные значения, говорят о *цифровом изображении*. Элементарная единица цифрового изображения называется **пикселием**.

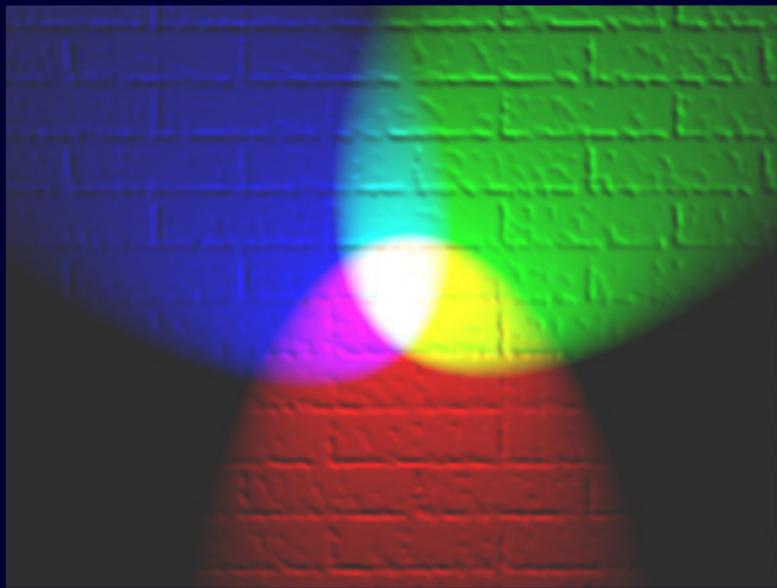
Дискретизация

Процедуру квантования (**дискретизации**) квазинепрерывного изображения $I_0(X, Y)$ можно представить в виде:

$$I(x, y) = \text{round} \left(\frac{2^N - 1}{I_{max}} \int\limits_{S_{x,y}} I_0(X, Y) dXdY \right) + \delta_{x,y}.$$

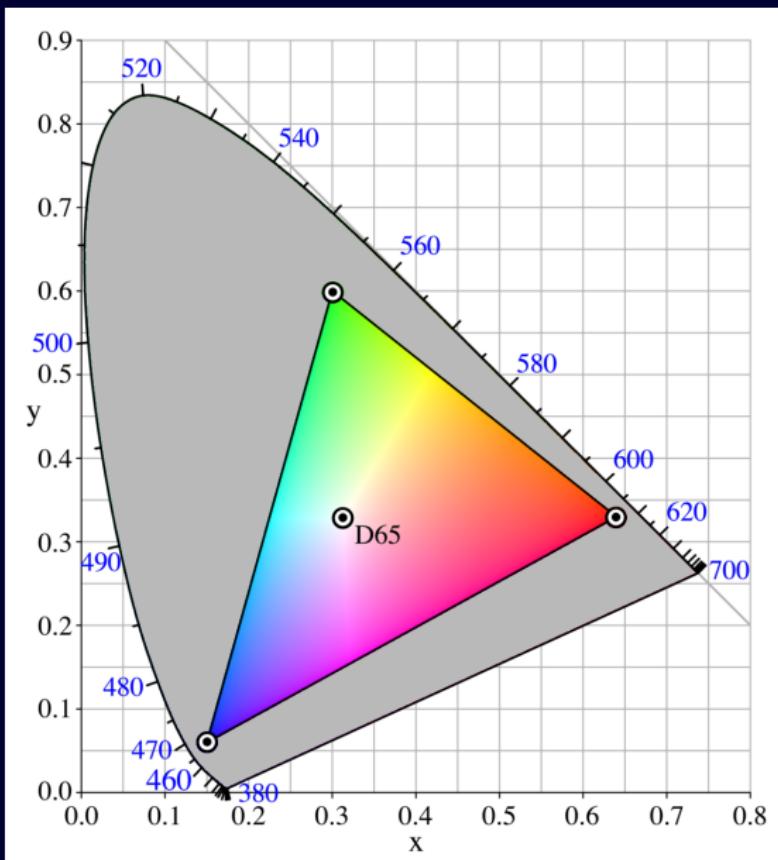


RGB-модель

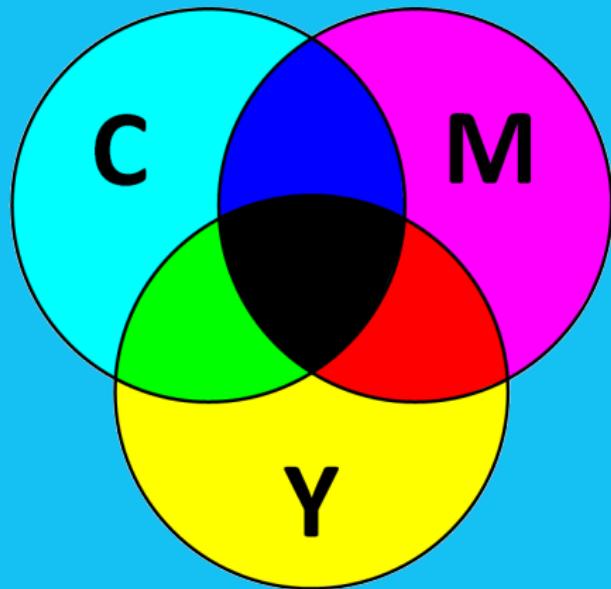


Аддитивная RGB-модель

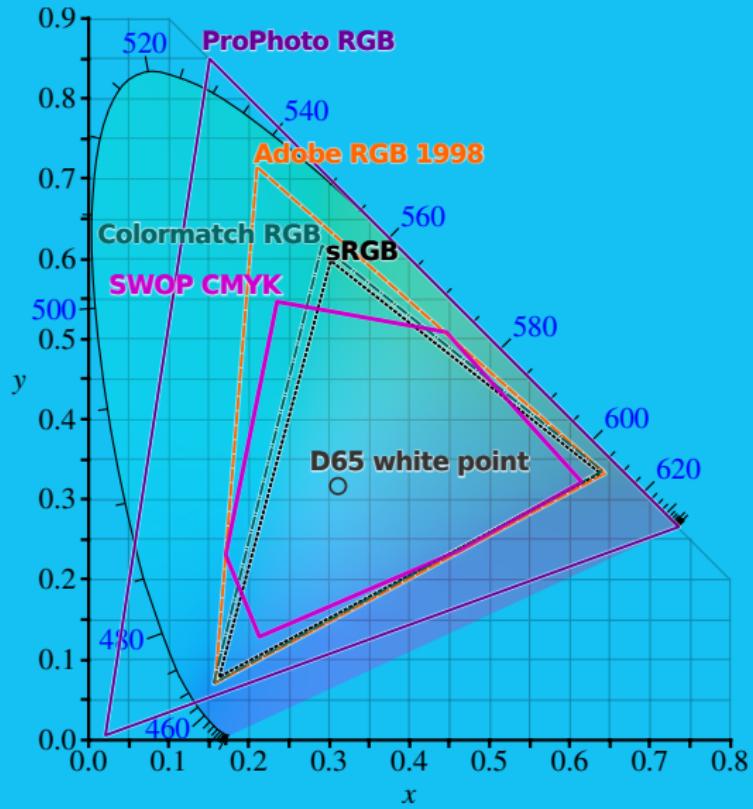
RGB-модель

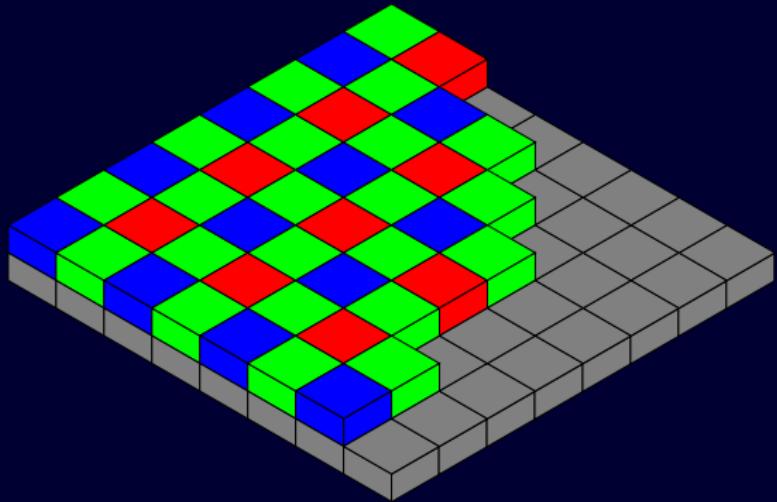


CMYK-модель



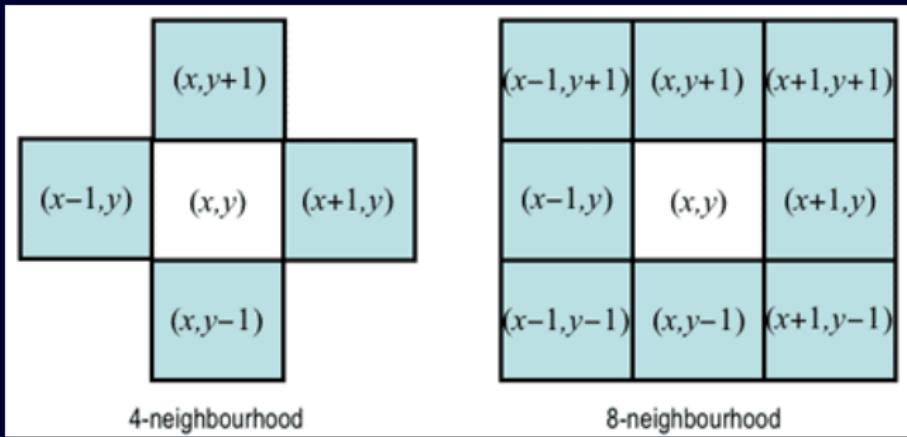
CMYK-модель





Маска Байера

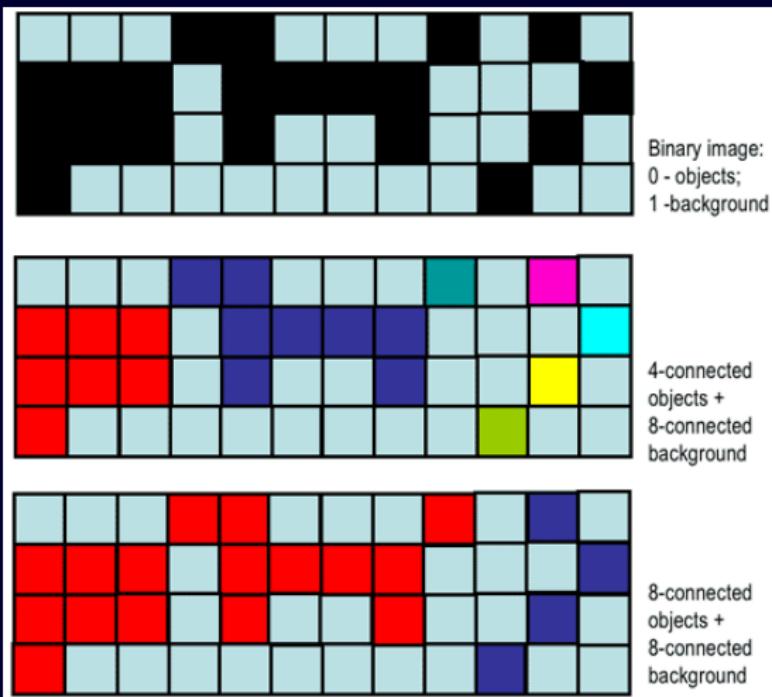
Математический аппарат



Соседство



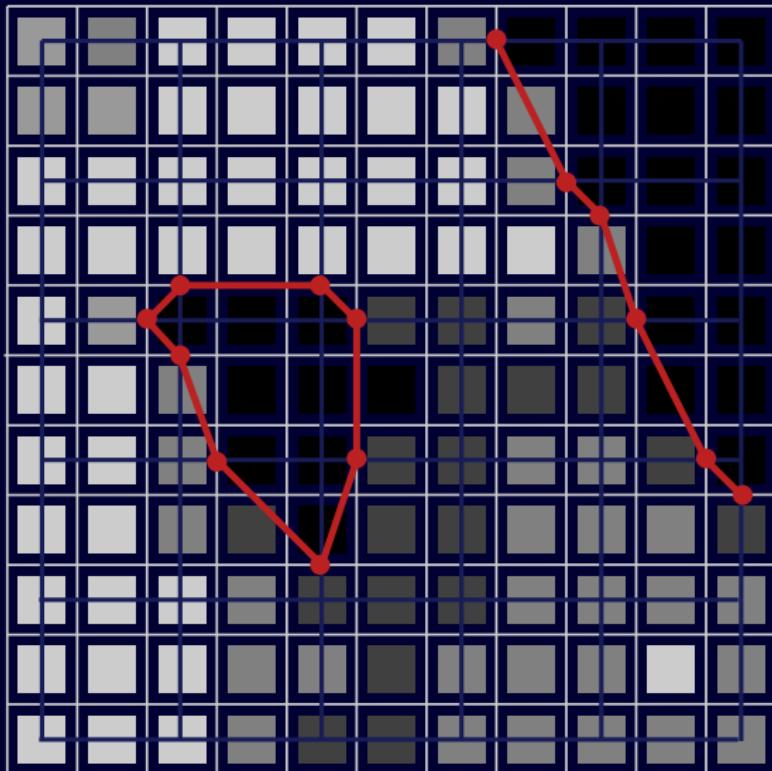
Математический аппарат



Связность



Математический аппарат



Границы, контуры



Расстояние

- Евклидово: $D_{e(p,q)} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$.
- Метрика L_1 : $D_4(p, q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$.
- Метрика L_∞ : $D_8(p, q) = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$.

Поэлементные и матричные операции

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Поэлементное произведение:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Матричное произведение:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$



Аффинные преобразования

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Тождество: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Масштаб: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Поворот: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Сдвиг: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Скос y : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Скос x : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Отражение x : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Отражение y : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Комбинация преобразований: $\mathbf{M} = \prod_i \mathbf{T}_i$ (зависит от порядка!).

Операции над множествами

Множества и дополнения: $A \cup A^C = \Omega$, $A \cap A^C = \emptyset$. ($A^C \equiv \overline{A}$).

Множество через операцию: $A^C = \{a \mid a \notin A\}$. Подмножества: $A \subset B$ или $B \supset A$.

Операции: $A - B = A \setminus B = A \cap B^C$, $A + B = A \cup B$.

Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Дистрибутивность: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Законы де-Моргана: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Логические (булевы) операции

$\cup \Rightarrow \vee$ (дизъюнкция, «или», $|$), $\cap \Rightarrow \wedge$ (конъюнкция, «и», $\&$), $A^C \Rightarrow \overline{A}$ (отрицание).



Ω A^c $A \cap B$ $A \cup B$ A A B $A - B$ B A B C $A \cap B^c$ $A \cap (B \cup C)$

Пространственные и градационные преобразования

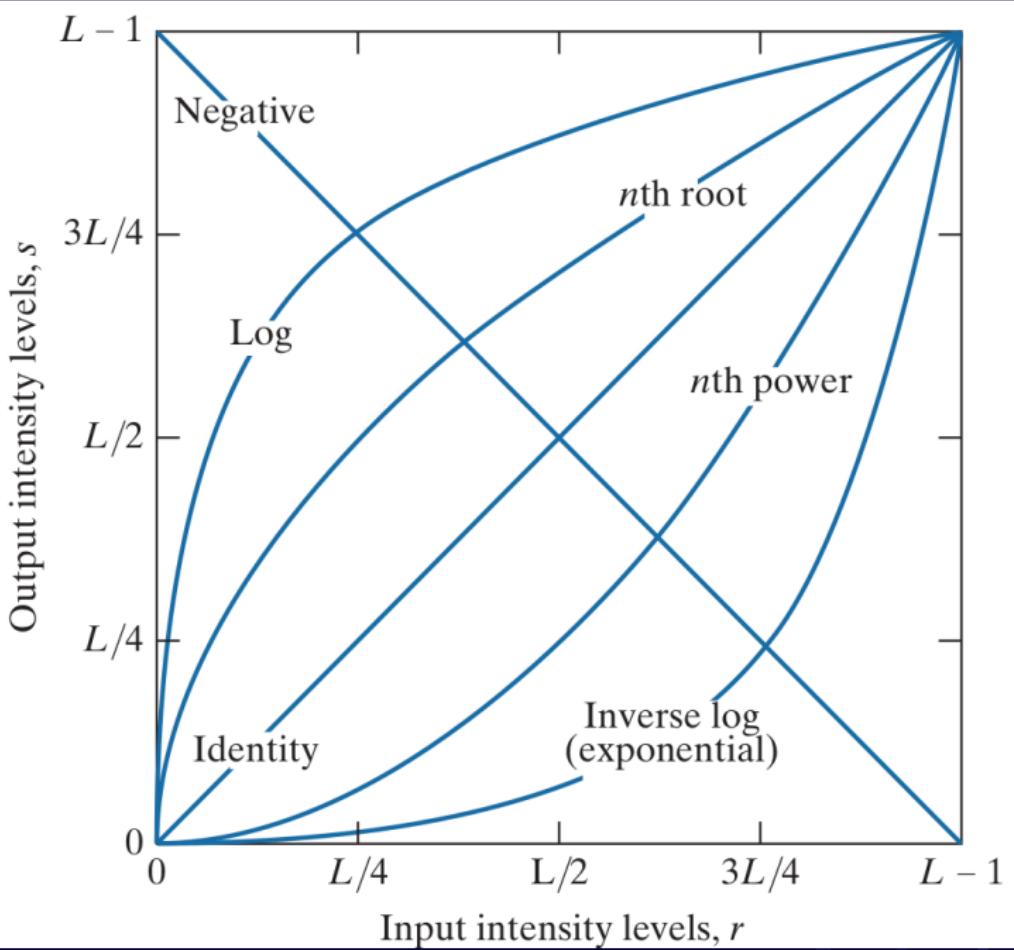
Преобразования в пространственной области работают непосредственно с пикселями изображения:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v), \quad \text{где } r \text{ -- ядро преобразования.}$$

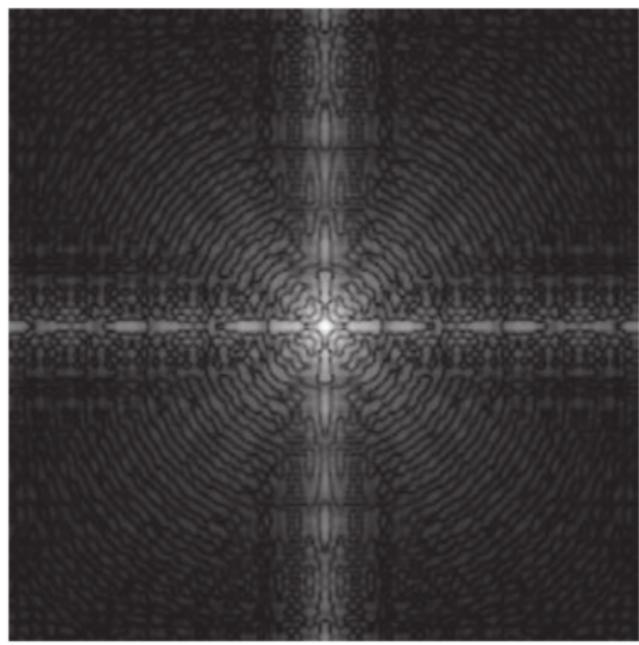
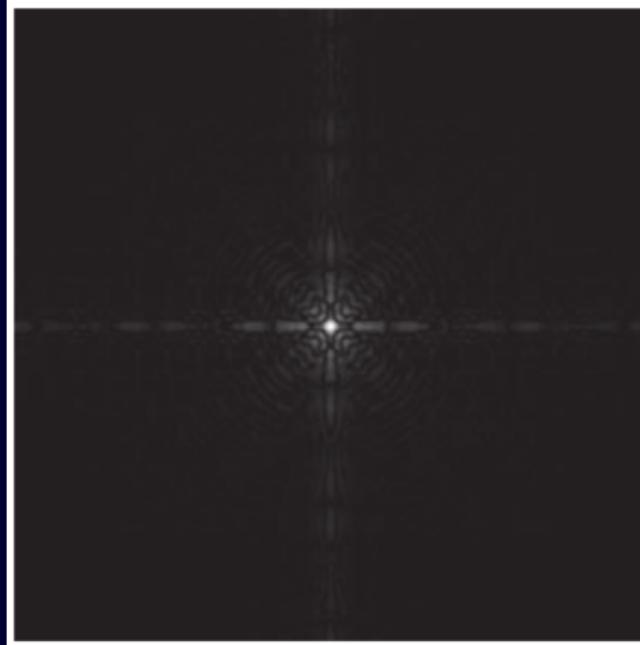
Градационные преобразования ($I \in [0, I_{max}], I' = f(I)$)

- негатив: $I' = I_{max} - I$;
- логарифмическое: $I' = C \ln(1 + I)$;
- гамма-коррекция: $I' = CI_{max} \cdot i^\gamma$, $i = \frac{I}{I_{max}}$;
- кусочно-линейные преобразования (усиление контраста).

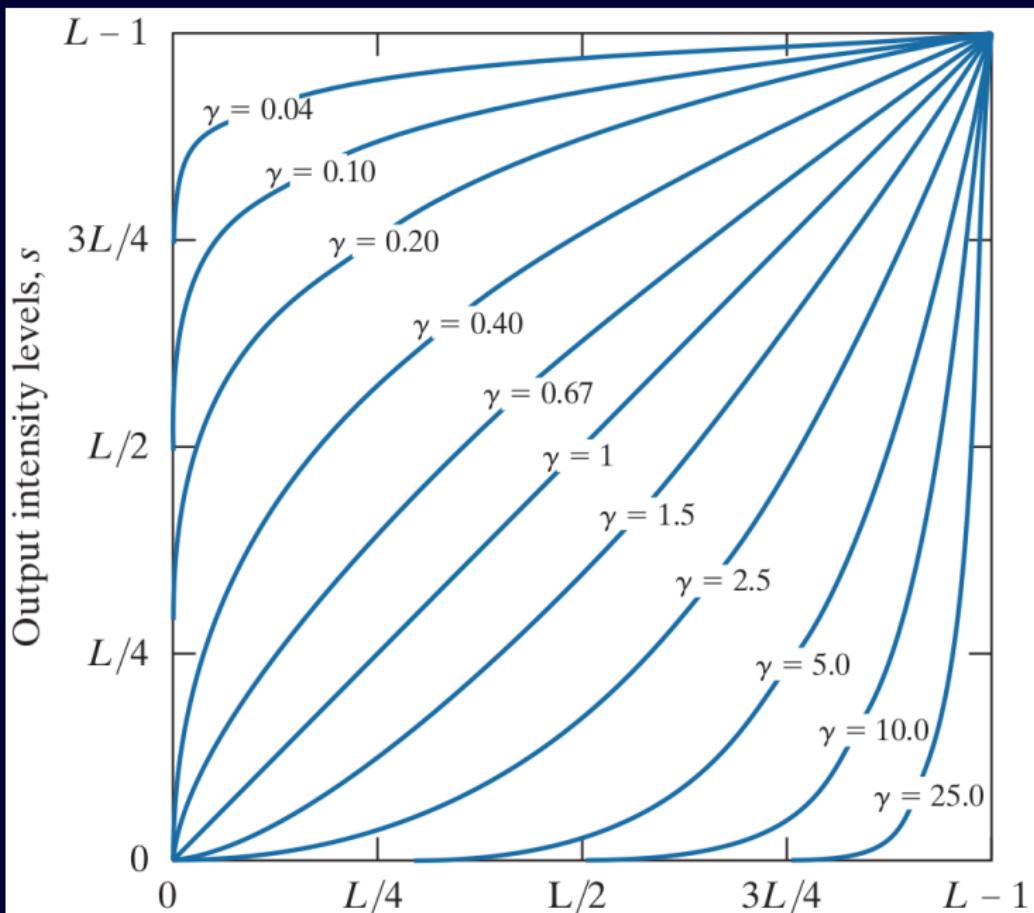


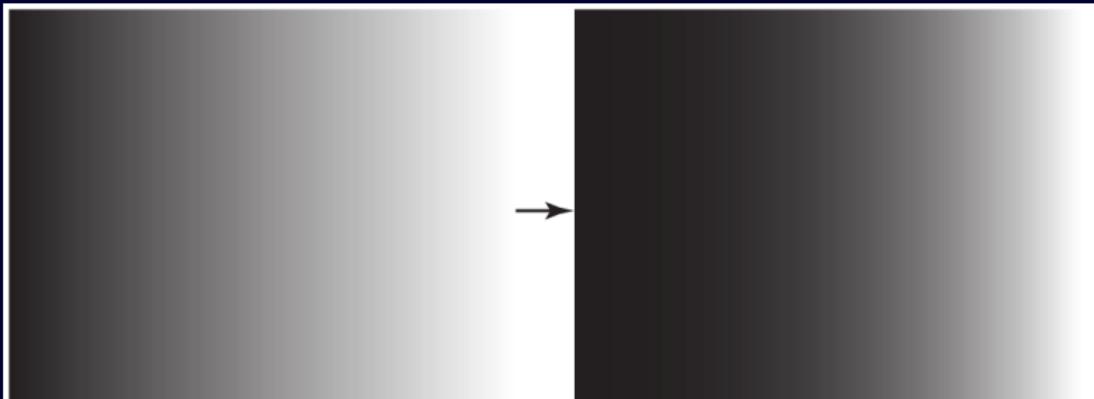


Логарифмическое преобразование.



Степенное преобразование (гамма-коррекция).





Original image

↓ **Gamma Correction**



Gamma-corrected image

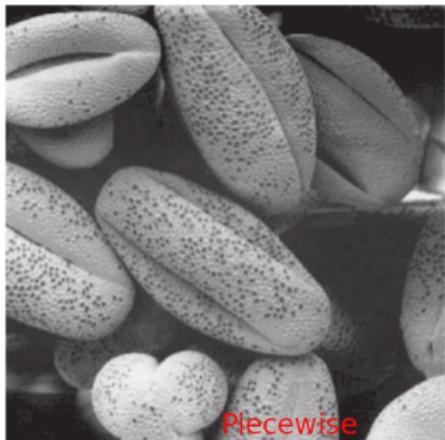
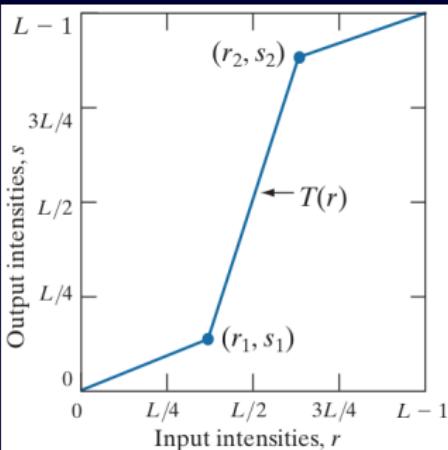
Original image as viewed on a monitor with
a gamma of 2.5

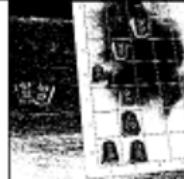
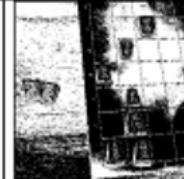
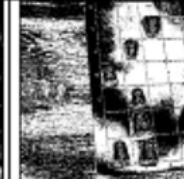


Gamma-corrected image as viewed on the
same monitor

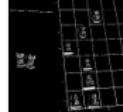


Кусочно-линейные преобразования.



Исходное изображение	Седьмая (старшая) битовая плоскость	Шестая битовая плоскость	Пятая битовая плоскость	Четвёртая битовая плоскость
	 Третья битовая плоскость	 Вторая битовая плоскость	 Первая битовая плоскость	 Нулевая (младшая) битовая плоскость

Битовые плоскости

Битовая плоскость	Исходное изображение	Изображение в кодах Грея
Седьмая		
Шестая		
Пятая		
Четвёртая		
Третья		
Вторая		

Битовые плоскости в кодах Грея

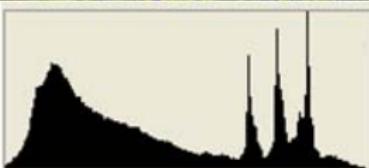


Гистограмма

Histogram Basic Tutorial



Underexposed

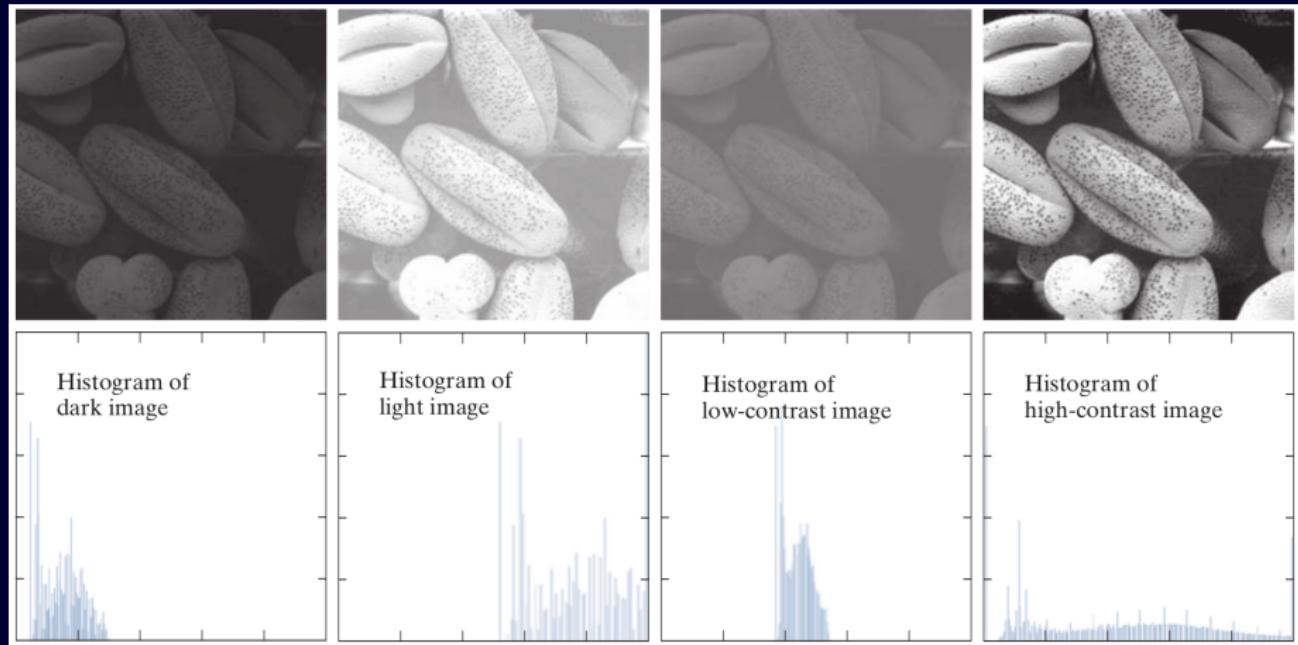


Well Exposed

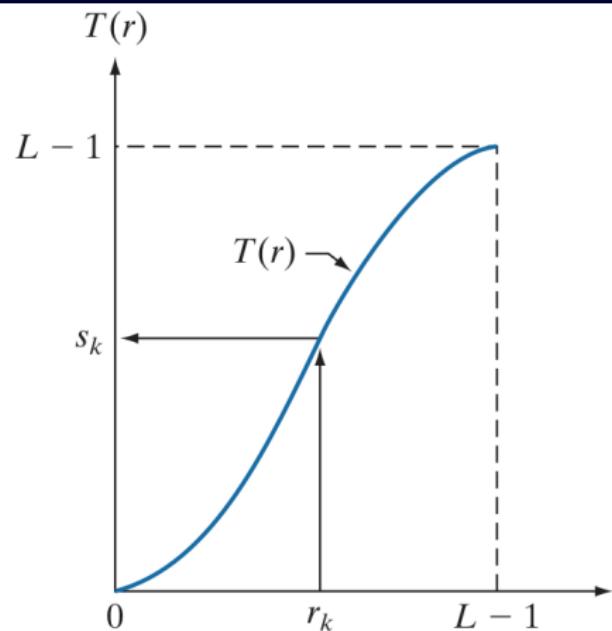
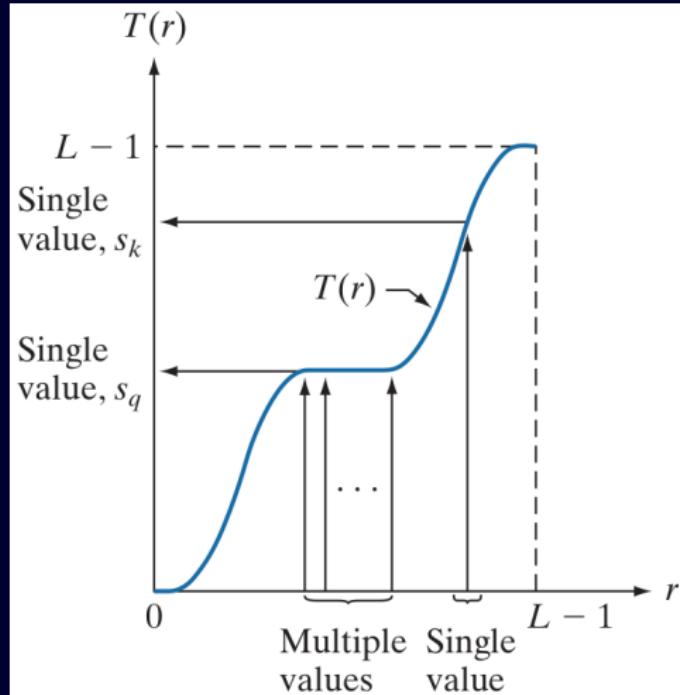


Overexposed

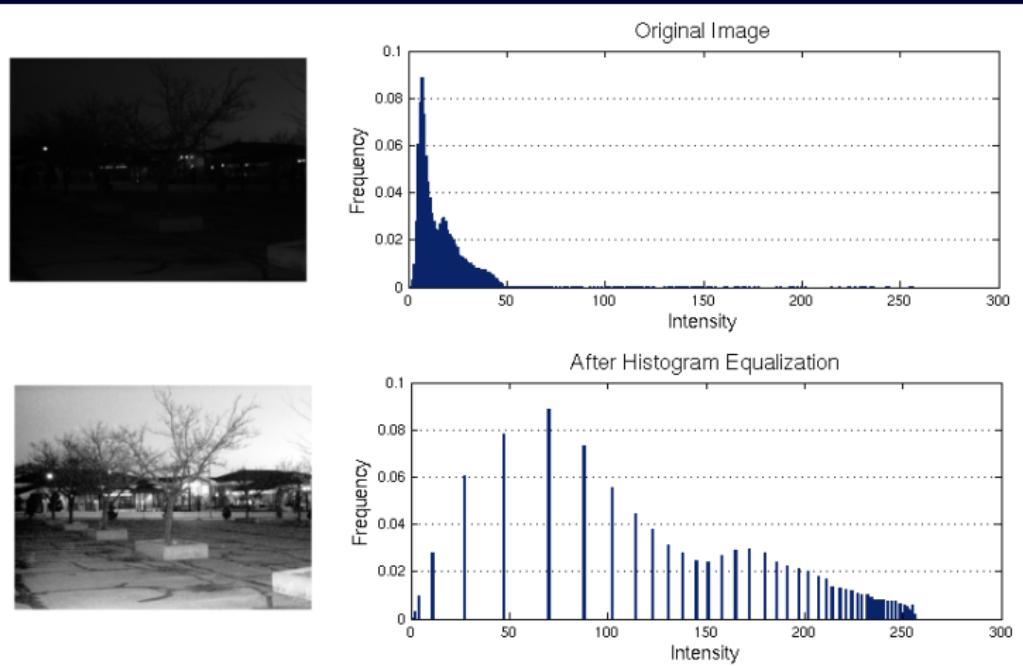
Гистограмма



Неоднозначное (необратимое) и однозначное (возможно, обратимое) отображения:



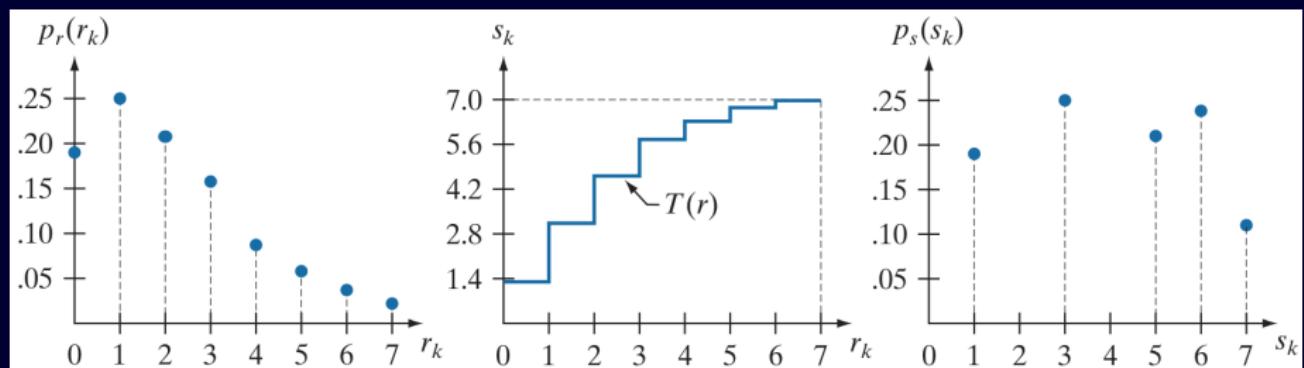
Эквализация гистограммы



N_i – количество пикселей на i -м уровне, L – максимальная интенсивность,
 $M = \sum_0^L N_i$ общее количество пикселей.

Эквализация: $i' = \frac{\sum_{j=0}^i N_j}{M} L$.

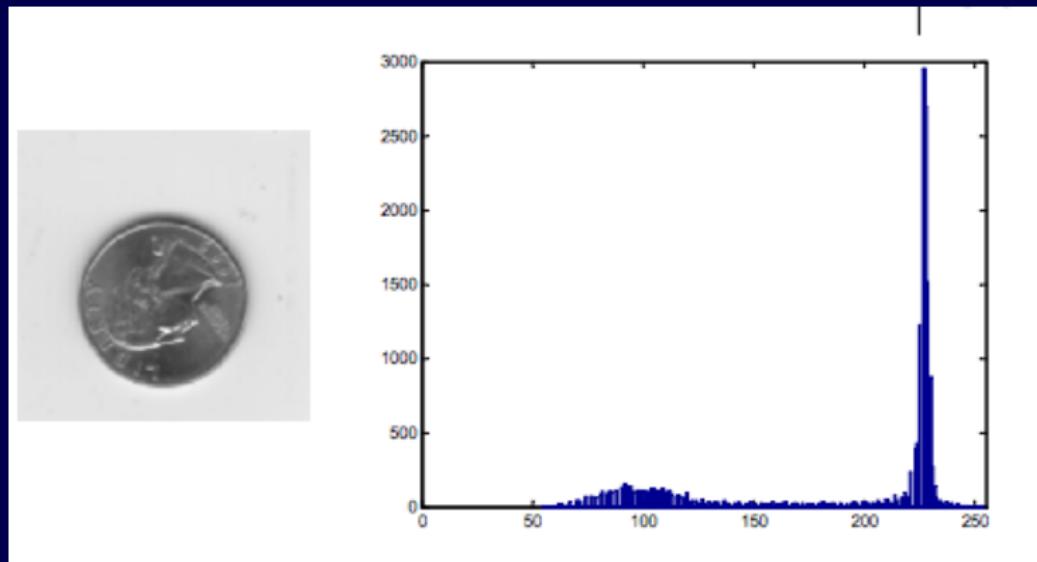
Если n_i – доля с i -м уровнем, то: $i' = L \sum_{j=0}^i n_j$.



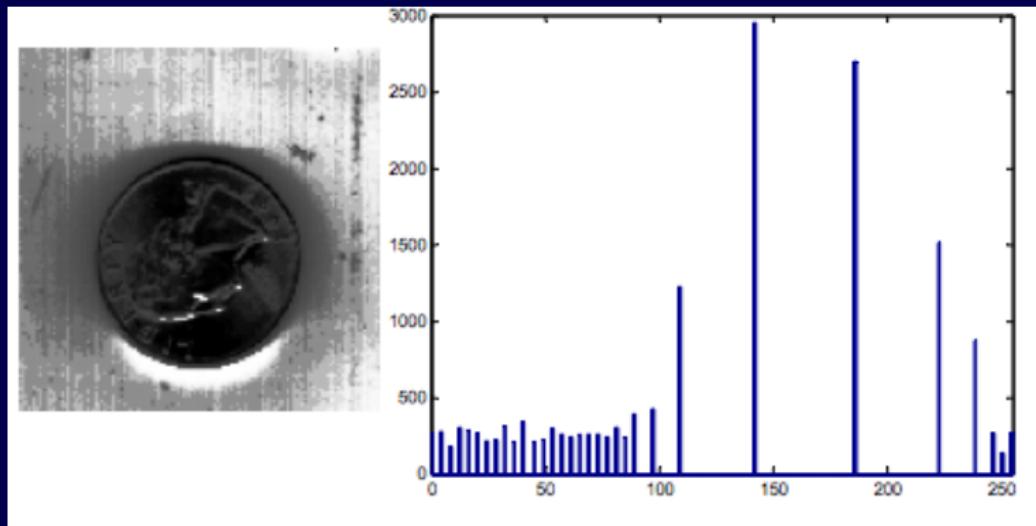
Приведение гистограммы $p_r \rightarrow p_z$

- 1 Получение эквализированной гистограммы, s_k .
- 2 Вычисление функции преобразования $G(z_q) = L \sum_{j=0}^q p_z(z_j)$.
- 3 Нахождение для каждого s_k соответствующего значения z_q , для которого $G(z_q)$ наиболее близко к s_k .
- 4 Формирование приведенного изображения.

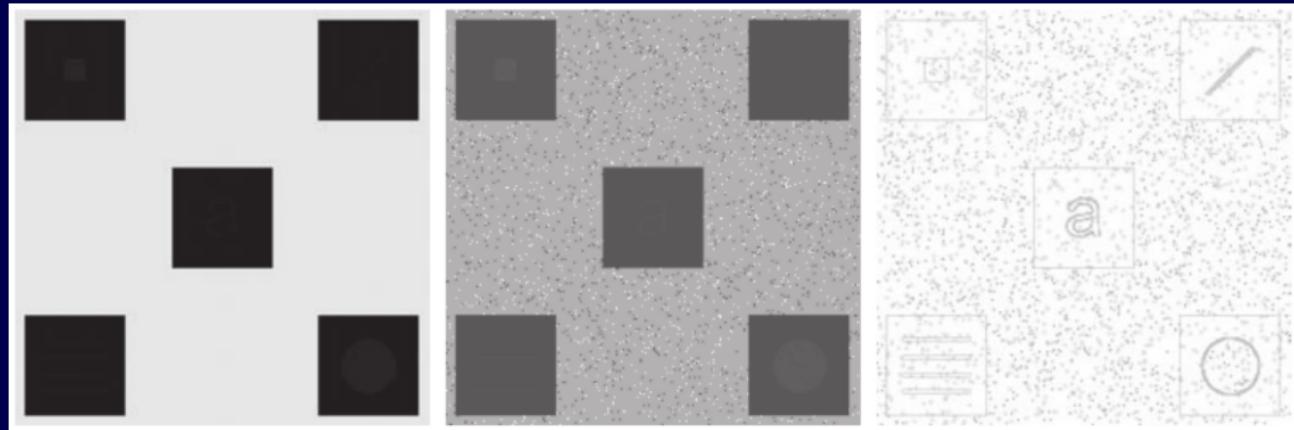
Локальная гистограммная обработка



Локальная гистограммная обработка



Локальная гистограммная обработка



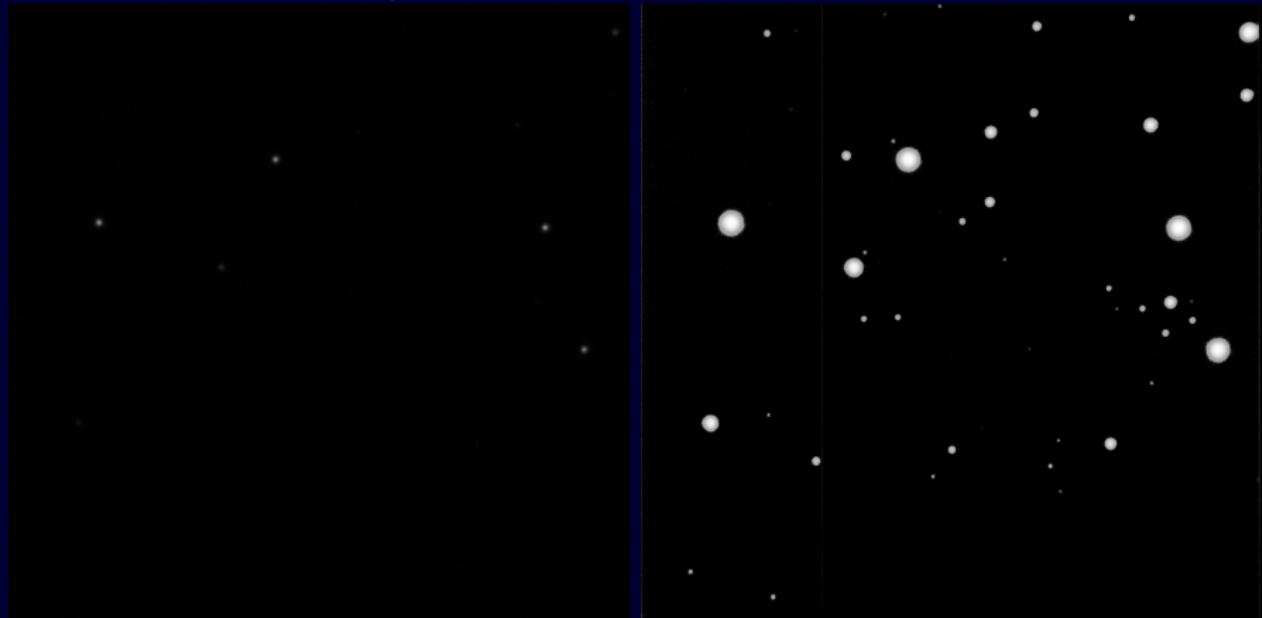
Эквализация гистограммы

M13: без и с эквализацией:



Эквализация гистограммы

M29: без и с эквализацией:



Пространственная фильтрация

$w(s, t)$ – ядро преобразования размера $m \times n$ ($m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$),
 $f(x, y)$ – исходное изображение, $g(x, y)$ – результат. Преобразование:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t),$$

что является расширением одномерного преобразования:

$$g(x) = \sum_{s=-a}^a w(s) f(x + s).$$



Пространственная фильтрация

$$f = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0, \quad w = 1\ 2\ 3\ 4\ 5.$$

Корреляция, $v = f * w$

0 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 2 3 4 5

3 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 1 2 3 4 5

7 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4 5

a : 0 0 0 5 4 3 2 1 0 0 0 0

v : 0 5 4 3 2 1 0 0

Свертка, $v = f * w$

0 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 5 4 3 2 1

3 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 5 4 3 2 1

7 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 5 4 3 2 1

a : 0 0 0 1 2 3 4 5 0 0 0 0

v : 0 1 2 3 4 5 0 0



Пространственная фильтрация

		Padded f	
Origin	f	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	w	0 0 0 1 0 0 0 1 2 3 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 7 8 9 0 0 0 0	
(a)		(b)	
Initial position for w		Correlation result	Full correlation result
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0 9 8 7 0 0 6 5 4 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 8 7 0 0 0 0 6 5 4 0 0 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
(c)		(d)	(e)
Rotated w		Convolution result	Full convolution result
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 4 5 6 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Пространственная фильтрация

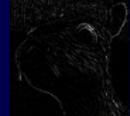
Идентичность



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Лапласиан



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Лапласиан



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Резкость



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Размытие



$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Гаусс



$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

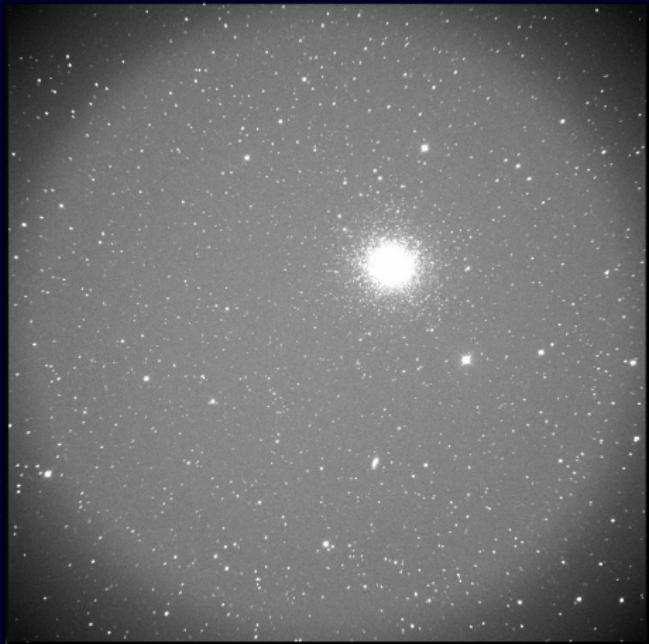
LoG



$$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 11 & 27 & 11 \\ 27 & -202 & 27 \\ 11 & 27 & 11 \end{pmatrix}$$

Пространственная фильтрация FITS

Оригинал:



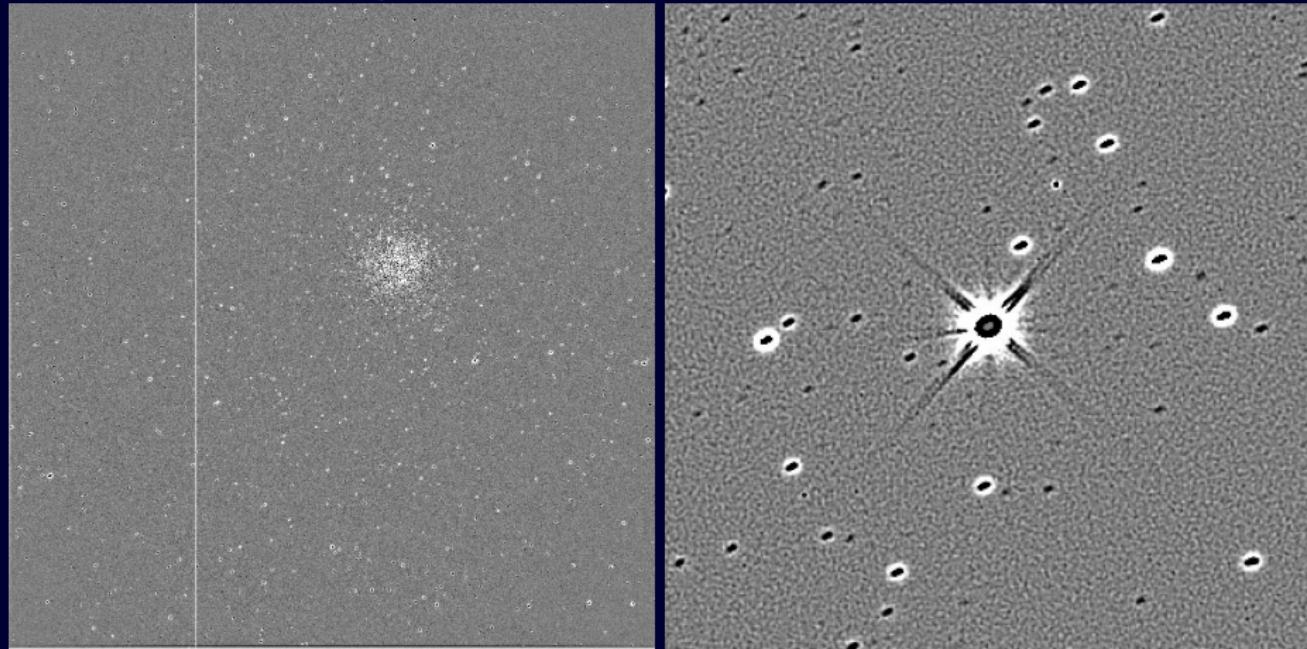
Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Гаусса 1×1 пиксель:



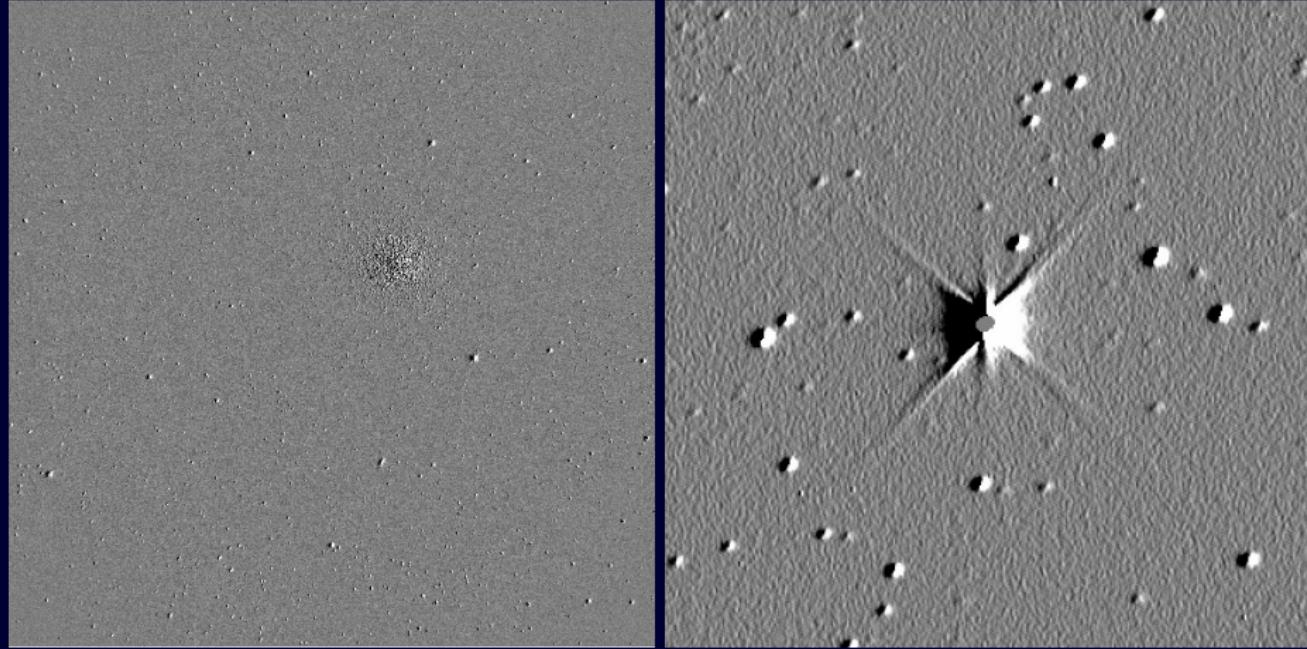
Пространственная фильтрация FITS

Фильтр лапласиана гауссианы 1×1 пиксель:



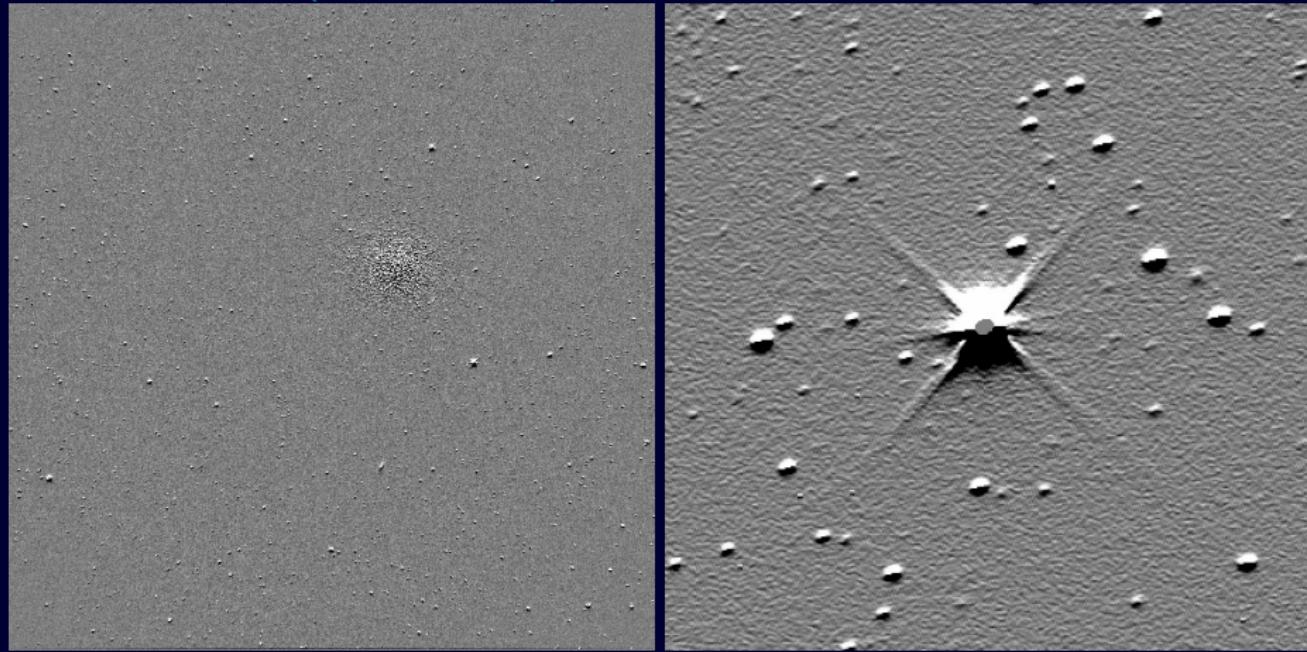
Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Прюитта (горизонтальный):



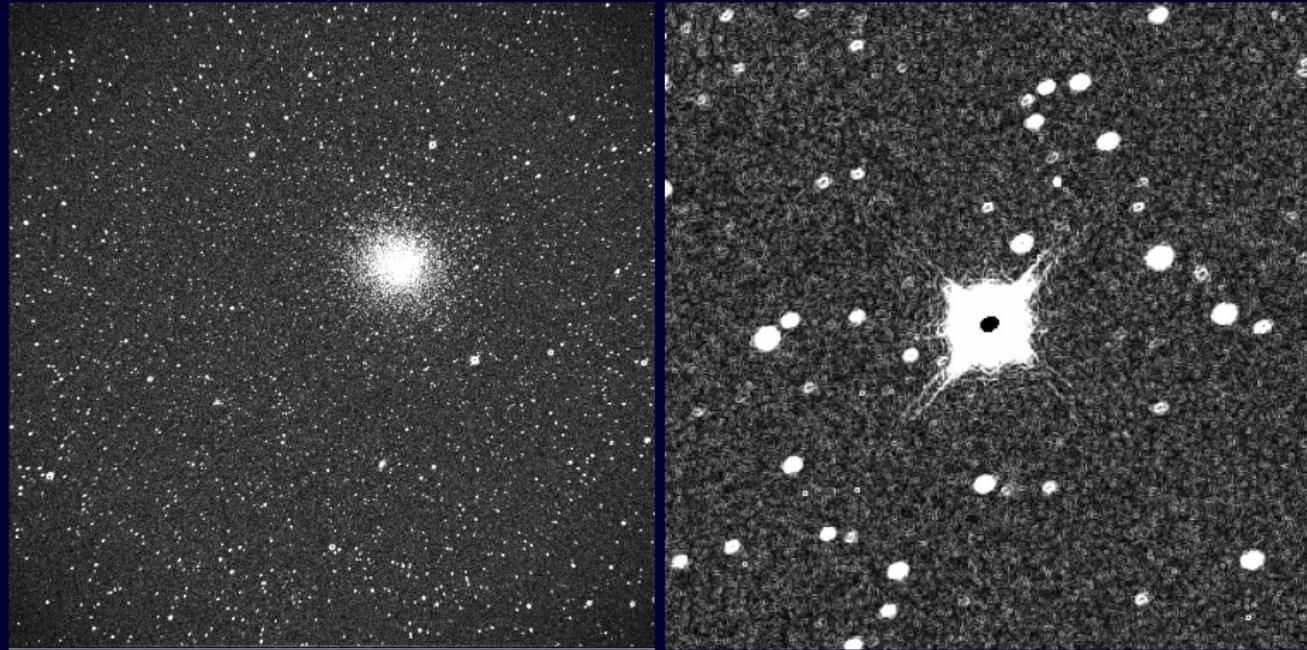
Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Прюитта (вертикальный):



Пространственная фильтрация FITS

Простой градиент (через фильтры Прюитта):



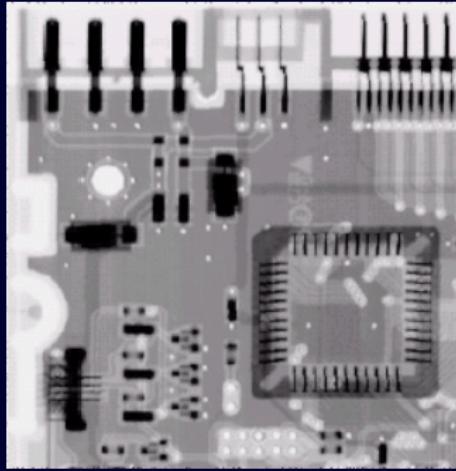
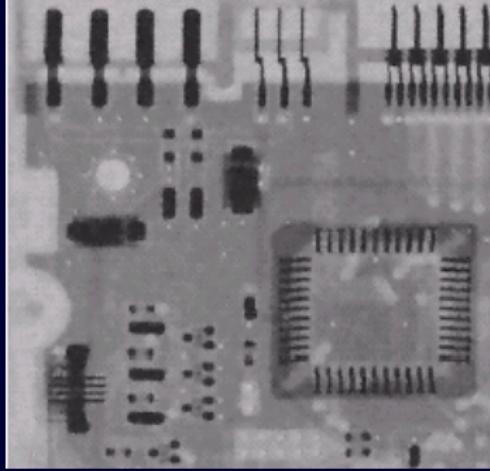
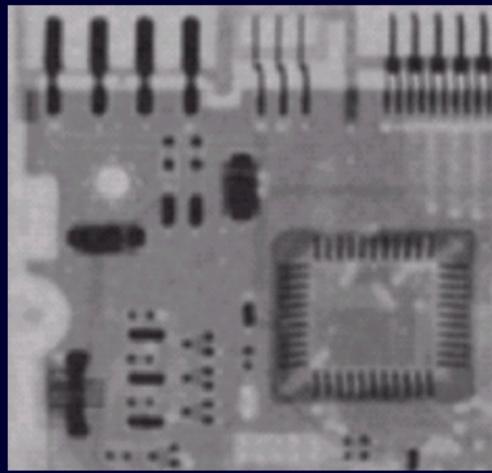
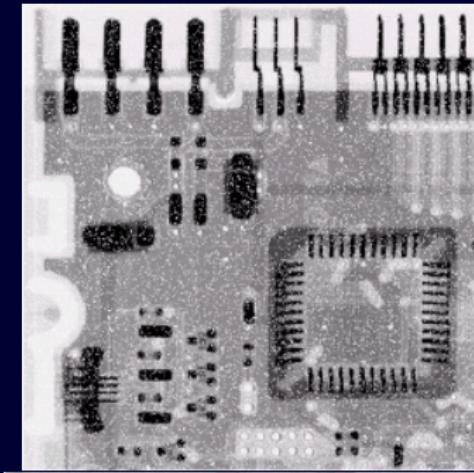
Медианная фильтрация



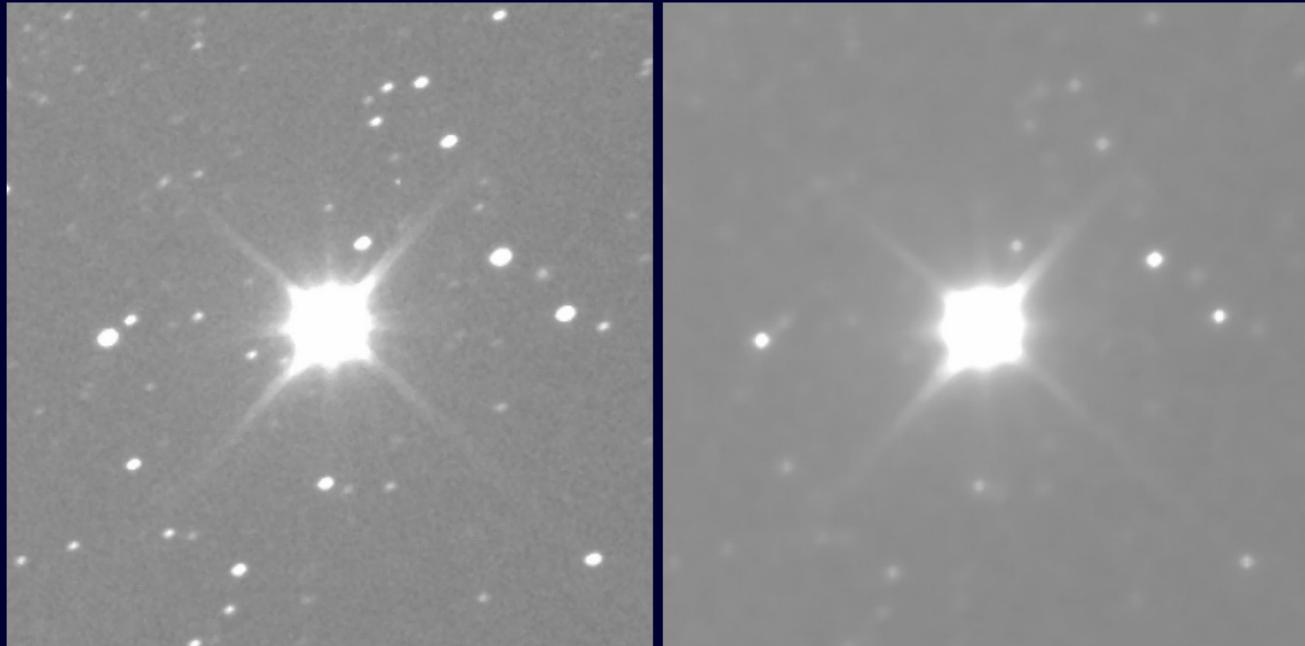
Адаптивный медианный фильтр

Зона $K \times K$ пикселей, I_{min} , I_{max} , I_{med} , I_{xy} (интенсивность в данной точке), K_{max} – максимальный размер зоны.

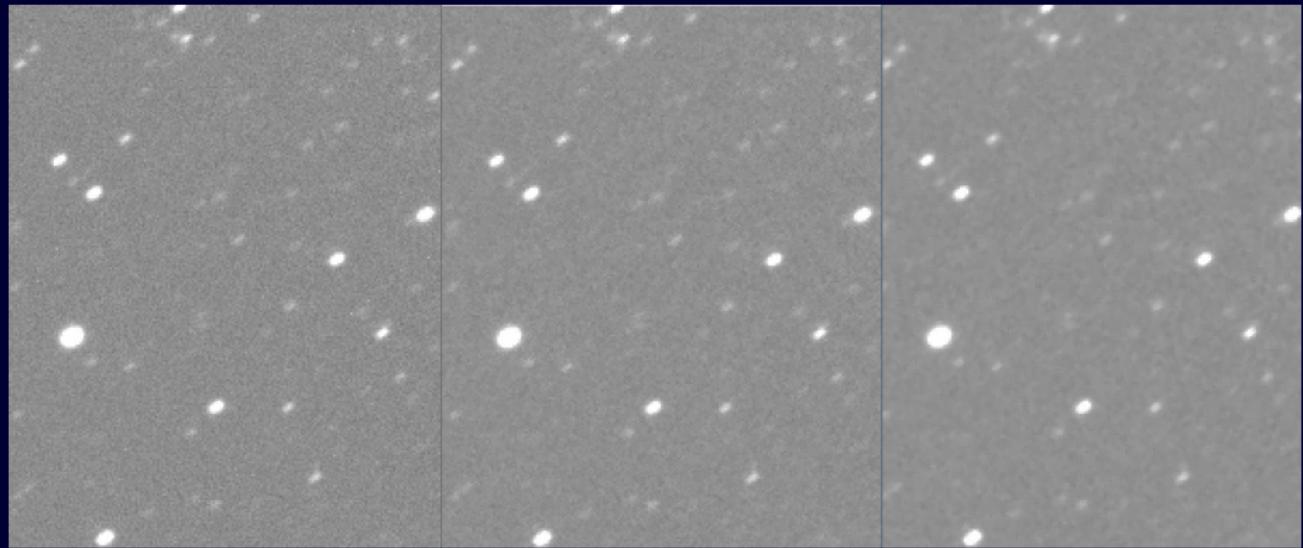
- ① $A_1 = I_{med} - I_{min}$, $A_2 = I_{med} - I_{max}$; если $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$ переход на 2, иначе $++K$; если $K < K_{max}$, повторить, иначе вернуть I_{xy} .
- ② $B_1 = I_{xy} - I_{min}$, $B_2 = I_{xy} - I_{max}$; если $B_1 > 0$ и $B_2 < 0$, вернуть I_{xy} , иначе вернуть I_{med} .



Медианная фильтрация $r = 1$ пиксель и $r = 5$ пикселей:



Оригинал, аддитивная медиана ($r = 1$) и медиана ($r = 1$):



Частотные преобразования

Двумерное ДПФ

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-2\pi i \left(ux/M + vy/N\right)\right).$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(2\pi i \left(ux/M + vy/N\right)\right).$$

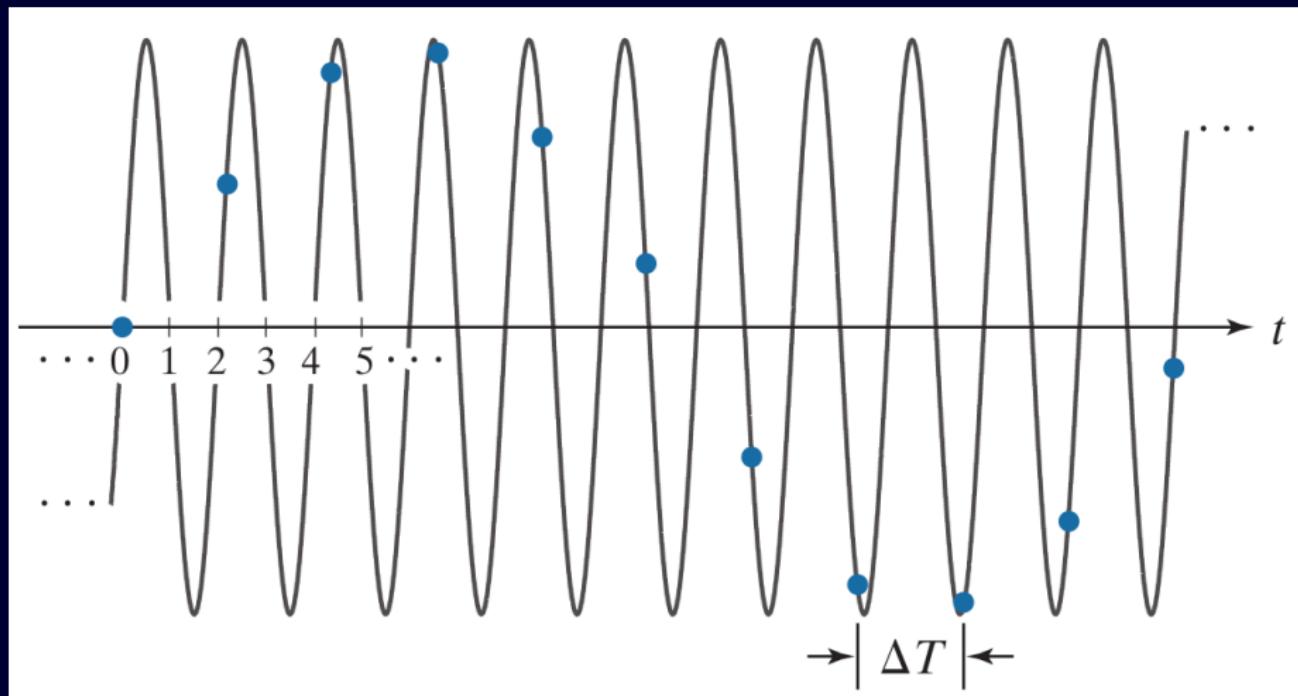
Частотные преобразования:

$$g(x, y) = \Re \left(\mathcal{F}^{-1} (H(u, v) \cdot F(u, v)) \right),$$

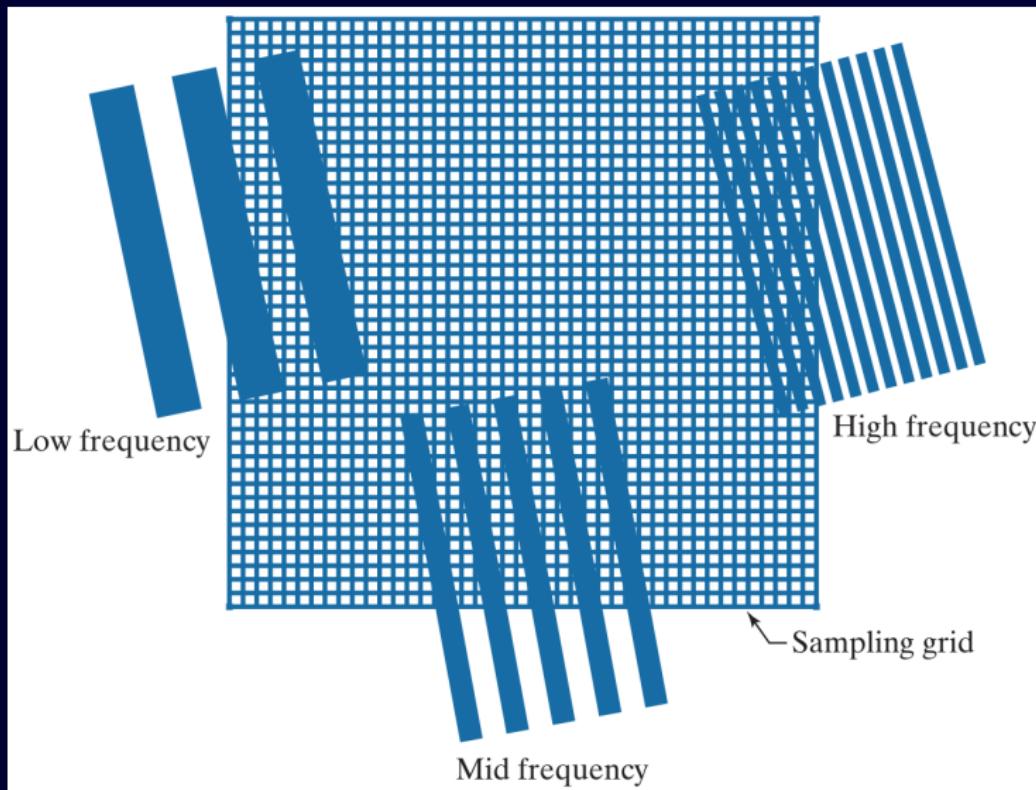
где g – результат, H – **передаточная функция фильтра**, F – Фурье-образ исходного изображения.



Ложные частоты (aliasing, муар)



Ложные частоты (aliasing, муар)



Ложные частоты (aliasing, муар)



Связь пространственных и частотных преобразований

Пусть $f(x, y)$ — изображение размера $M \times N$, а $F(u, v) = \mathcal{F}(f)$ — его Фурье-образ. Тогда шаг по u и v определяется выражениями:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}.$$

Смещение изображения (не оказывает эффекта на модуль БПФ):

$$f(x, y) \exp[2\pi i(u_0x/M + v_0y/N)] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0),$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-2\pi i(x_0u/M + y_0v/N)].$$

В полярных координатах $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$, т.е. вращение изображения приводит к повороту Фурье-образа на тот же угол.
Фурье-образ — периодическая функция, возможны краевые эффекты!



Спектр и фаза

$F(u, v) = \Re(u, v) + \Im(u, v) = |F(u, v)| e^{i\varphi(u, v)}$, где $|F(u, v)|$ – **спектр изображения**, а $\varphi(u, v)$ – его **фаза** (фазовый угол, $\varphi(u, v) = \arctan \frac{\Im(u, v)}{\Re(u, v)}$).

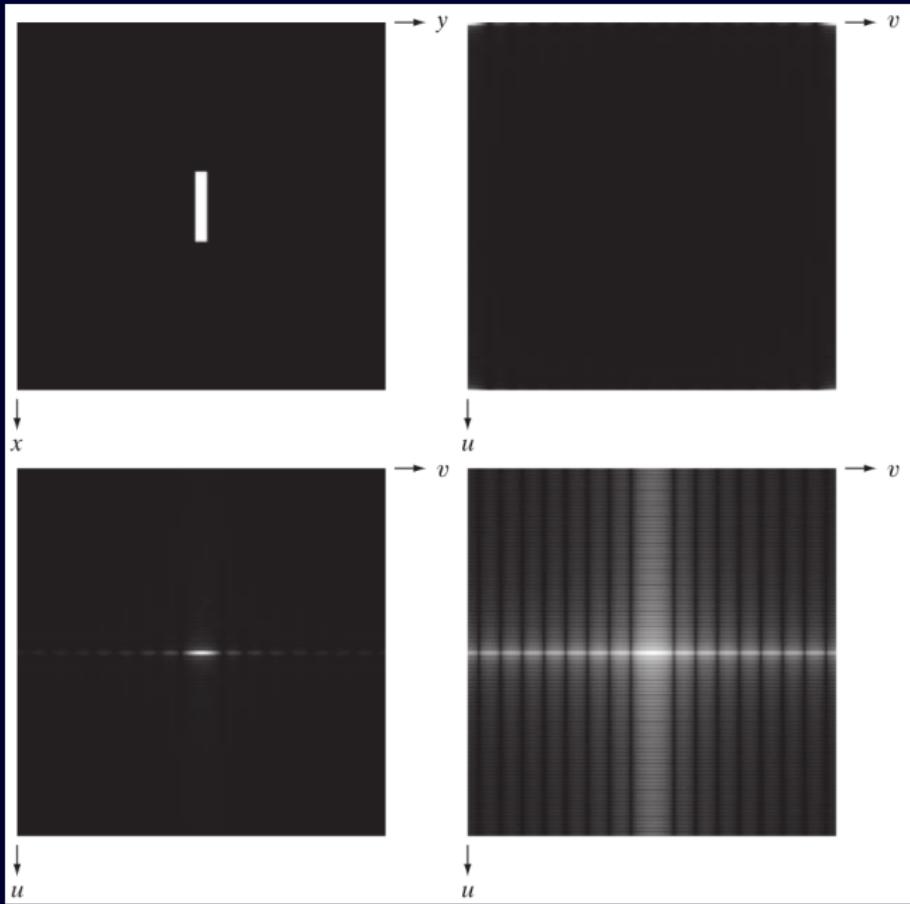
Зная компоненты образа, можно в Octave вычислить угол как `atan2(I, R)`.

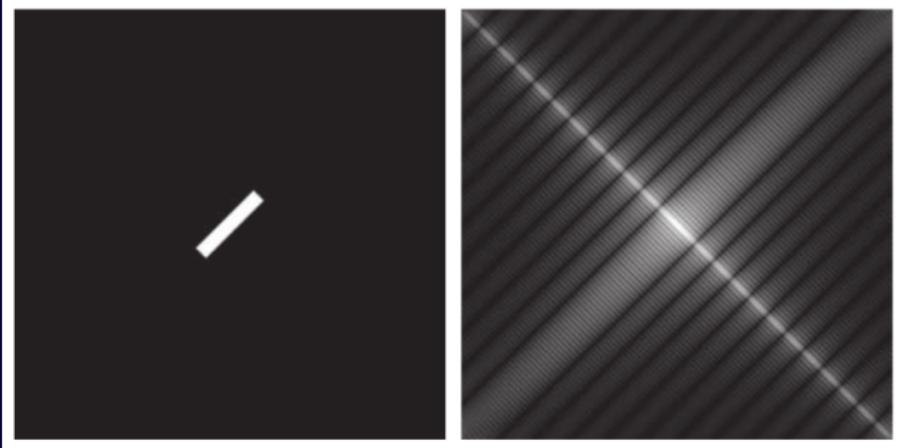
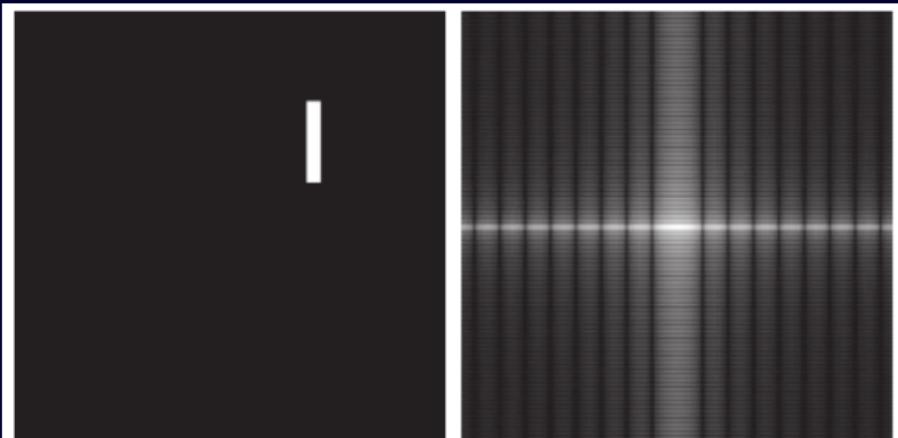
Спектр мощности $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = \Re^2(u, v) + \Im^2(u, v)$. Спектры и фаза обладают симметрией: $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$, $R(u, v) = R(-u, -v)$, $\varphi(u, v) = -\varphi(-u, -v)$.

$F(0, 0) = \sum \sum f(x, y) = MN \left(\frac{1}{MN} \sum \sum f(x, y) \right) = MN \langle f \rangle$ – пропорциональна среднему значению изображения. Удаление $F(0, 0)/MN$ эквивалентно вычитанию среднего.

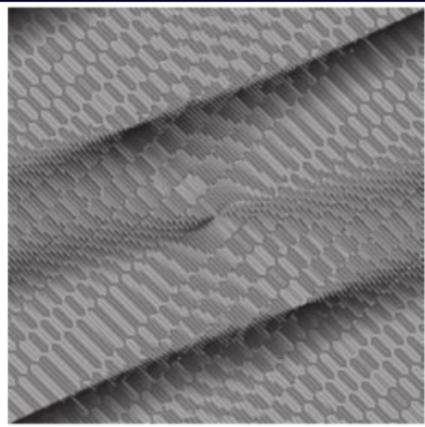
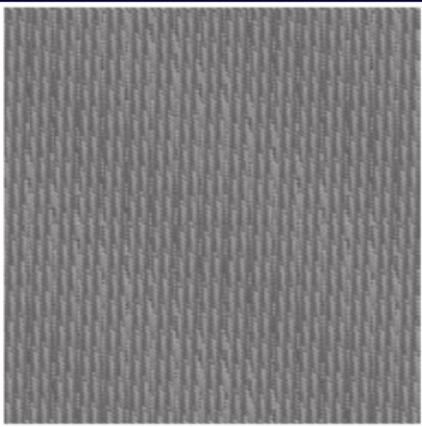
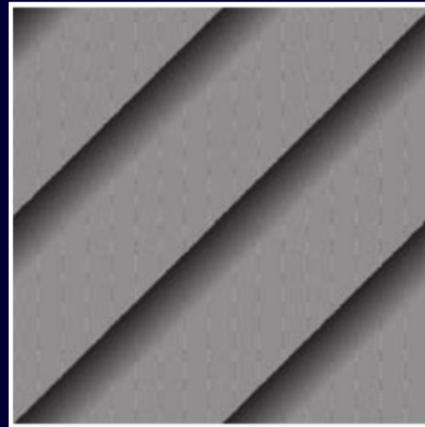


Изображение, спектр,
центрированный
спектр (`fftshift`) и
логарифмическое
преобразование
центрированного
спектра.

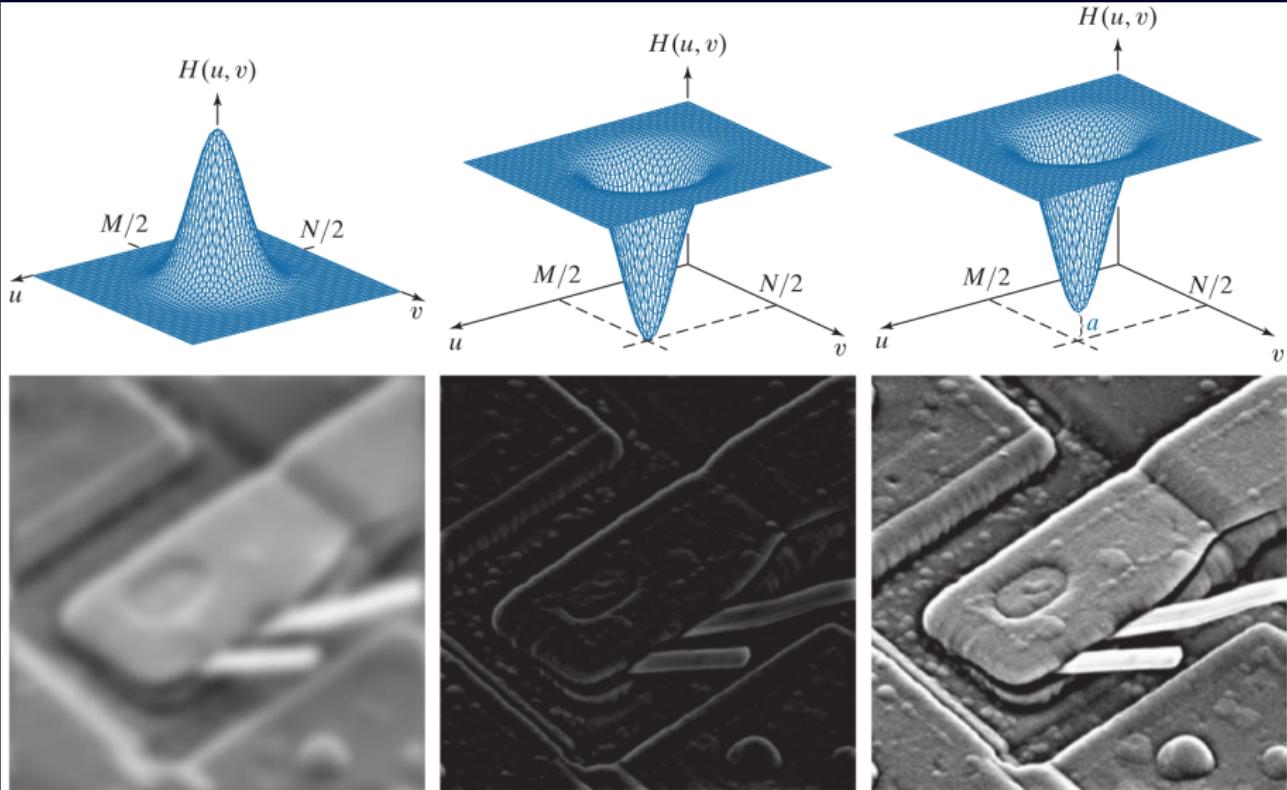




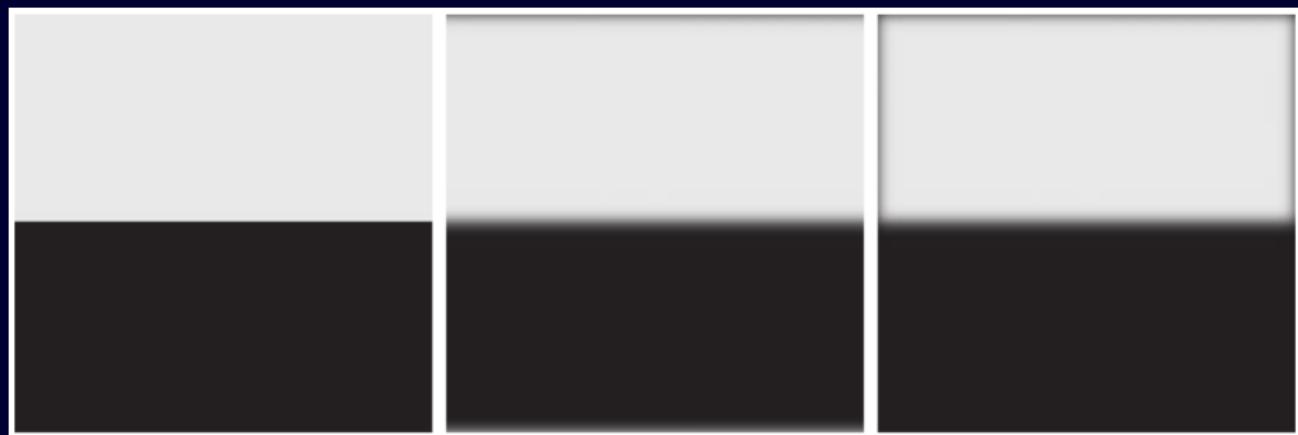
Фазы центрированного, смещенного и повернутого прямоугольников



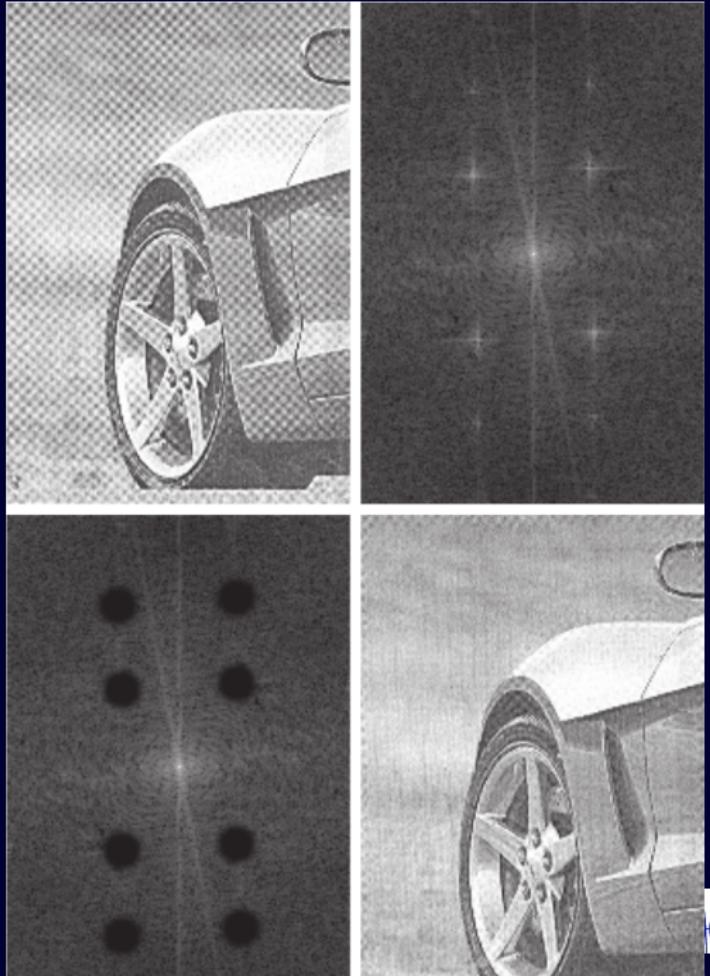
НЧ-фильтр, ВЧ-фильтр, ВЧ-фильтр со смещением:



Краевые эффекты: изображение, НЧ-фильтр Гаусса без дополнения изображения нулями, НЧ-фильтр Гаусса с дополнением нулями. При расширении изображения симметричным дополнением края не будут так изменяться.



Изображение с муаром (скан
газетного рисунка),
его спектр,
спектр после фильтрации,
изображение после
фильтрации.



SNR

$$\text{SNR} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}, \quad N = N_{star} + N_{sky} \quad \Rightarrow$$

$$\text{SNR} \approx \frac{N_{star}}{\sqrt{N_{star} + 2N_{sky}}}, \quad N = t_{exp} \cdot R \quad \Rightarrow$$

$$\text{SNR} \approx \frac{R_{star} \sqrt{t_{exp}}}{\sqrt{R_{star} + 2R_{sky}}} \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} \propto \sqrt{t_{exp}}$$

$$R = R_0 \cdot S_{mirror} \propto D_{mirror}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} \propto D_{mirror}$$

N_{meas} коротких экспозиций вместо одной: $\sigma_{mean} = \frac{\sigma_{individ}}{\sqrt{N_{meas}}} \propto \frac{\sqrt{S}}{N_{meas}}$

$$\text{SNR}_{mean} = \frac{S/N_{meas}}{\sigma_{mean}} \propto \sqrt{S} = \text{SNR}_{long} \quad \text{только если } \sigma \approx \sigma_{phot}!!!$$

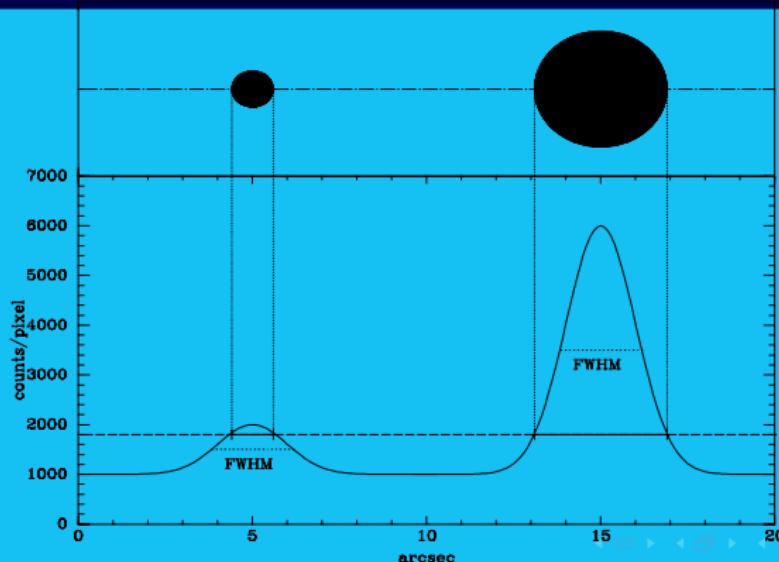


Коррекция апертуры

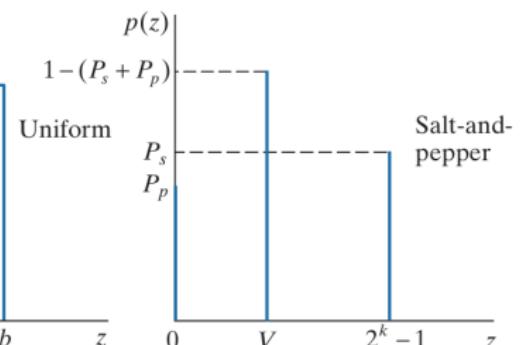
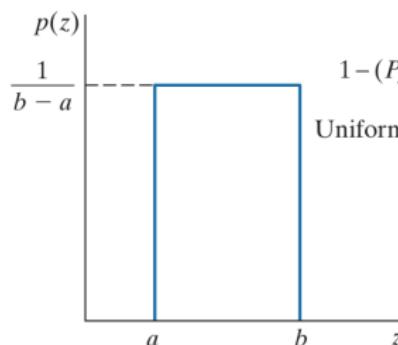
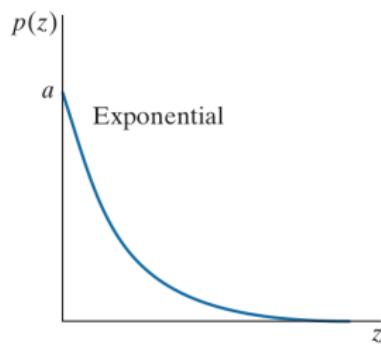
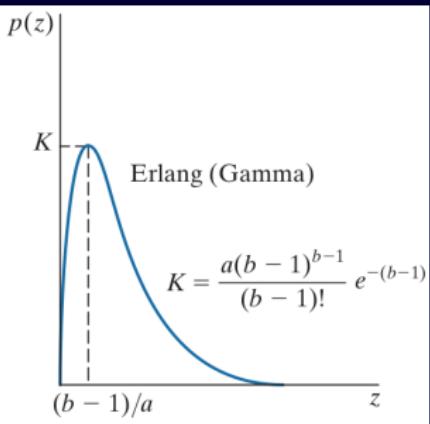
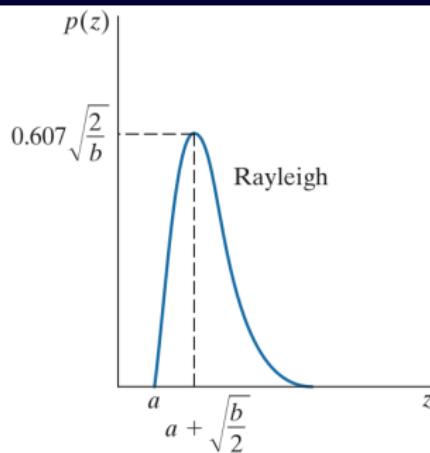
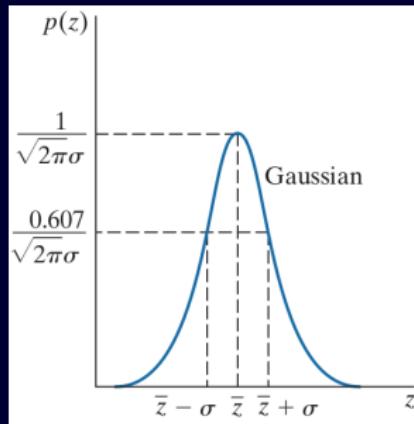
Почему изображение яркой звезды шире: несмотря на совершенно одинаковую PSF у обеих звезд, при сечении одинаковым порогом яркая звезда всегда «больше». Увеличение апертуры \Rightarrow увеличение шумов, необходимо использовать как можно меньшую апертуру.

$$\Delta_N^{bright} = m(N \cdot \text{FWHM}) - m(1 \cdot \text{FWHM}) \quad \Rightarrow \quad m^{faint} = m(1 \cdot \text{FWHM}) + \Delta_N^{bright}$$

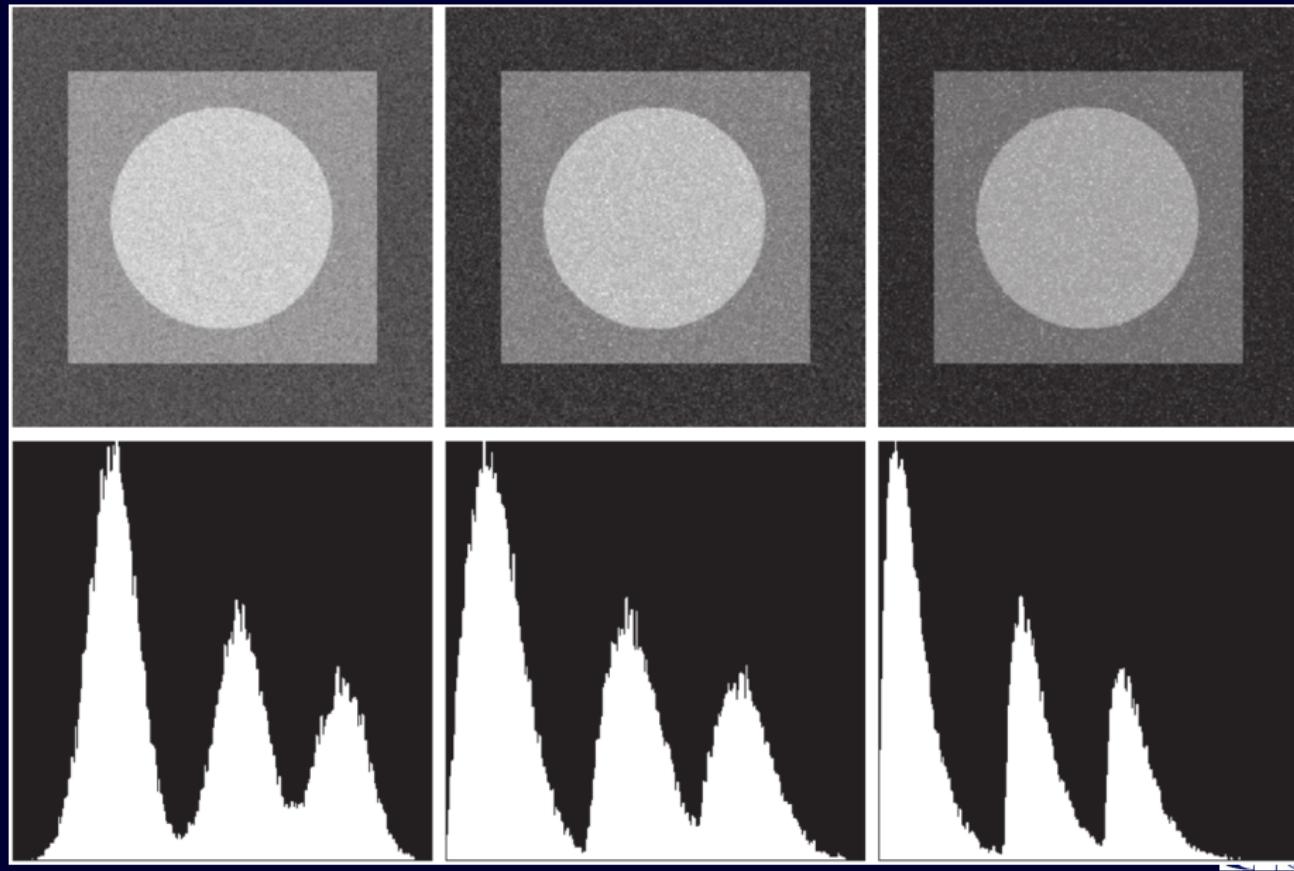
$m(x)$ – звездная величина на апертуре x .



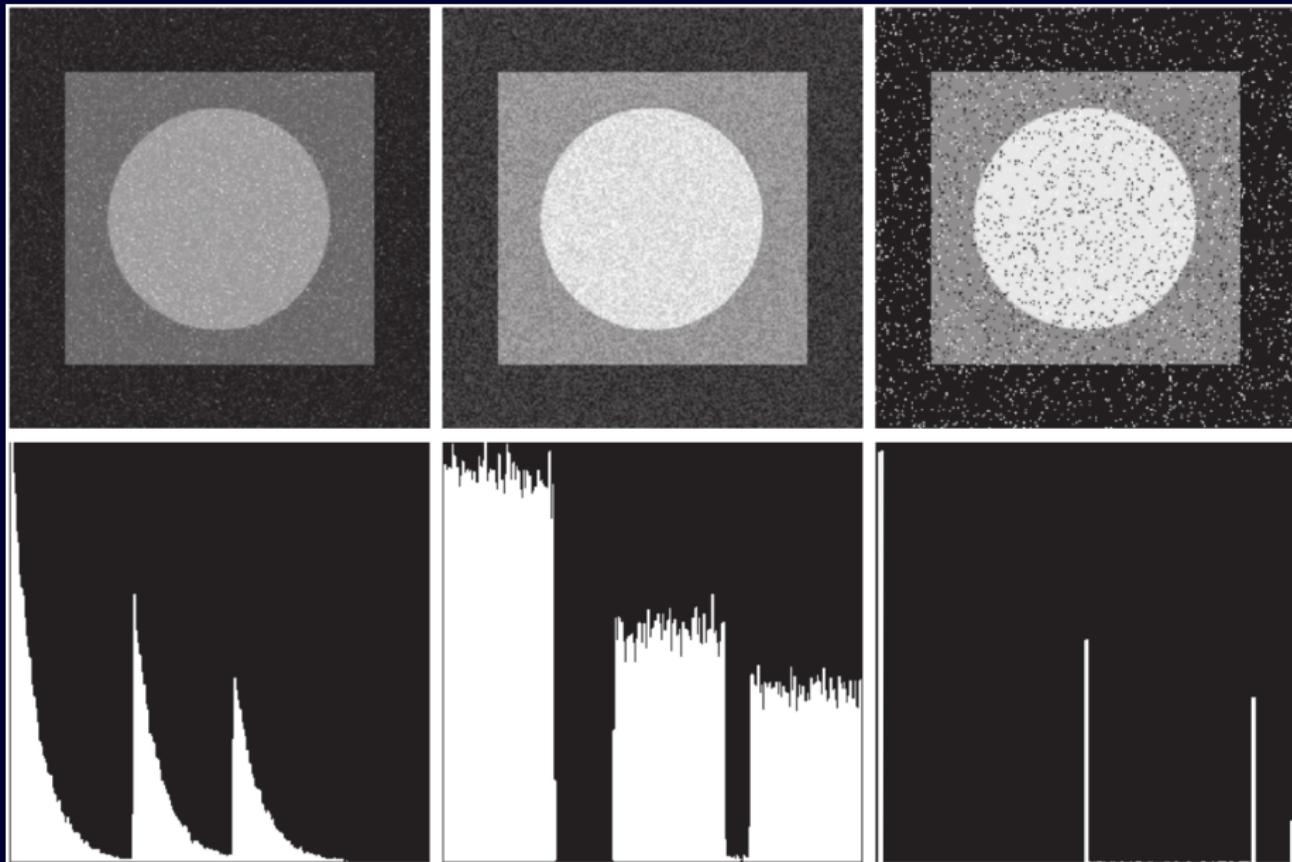
Функции плотности вероятности разных шумов.



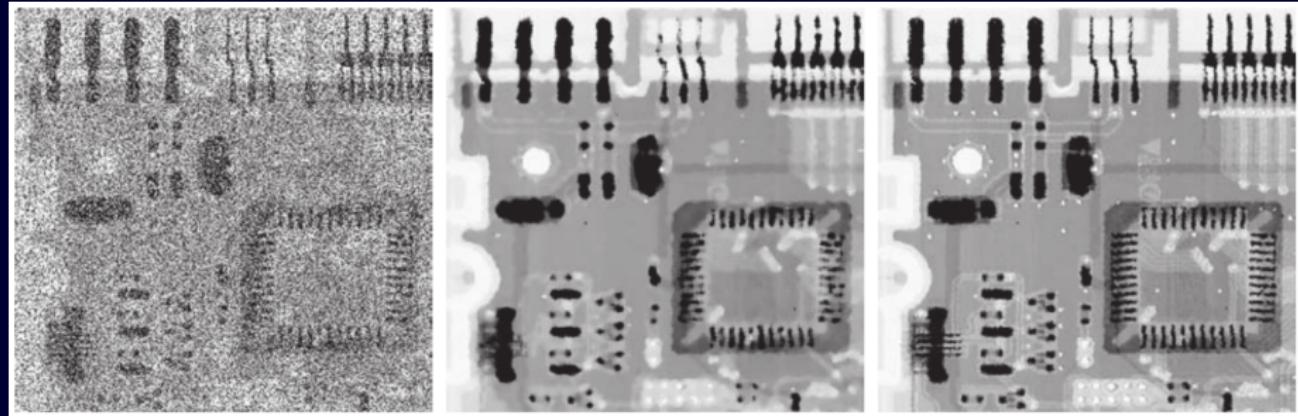
Гистограммы с шумами: нормальный, Рэлея, гамма:



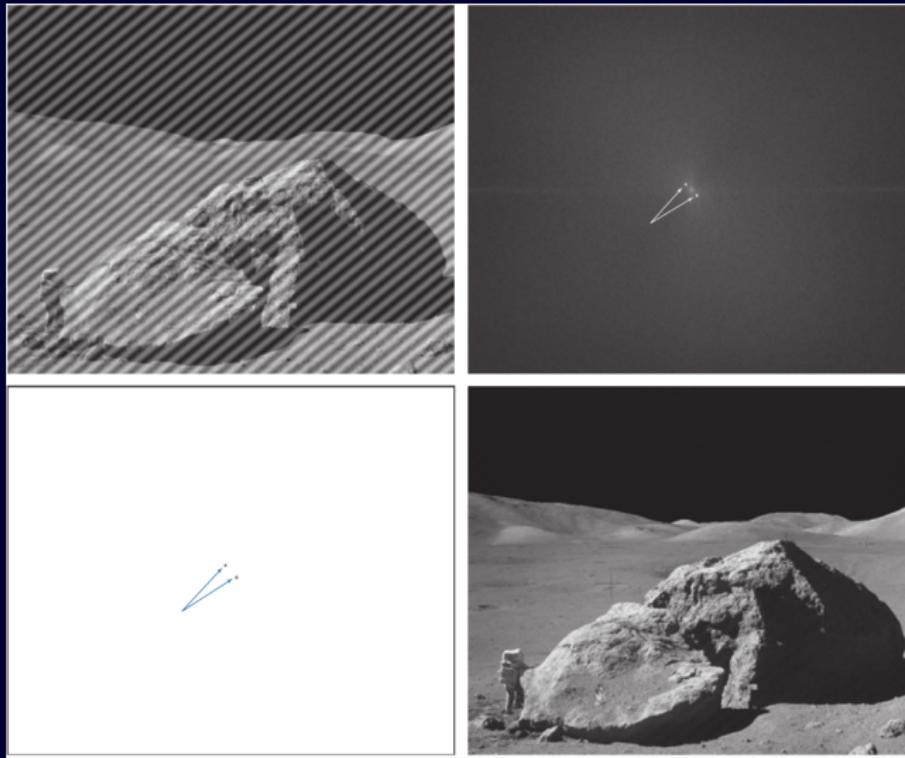
Гистограммы с шумами: экспоненциальным, равномерным, импульсным
«соль–перец»):



Фильтры: среднее арифметическое, гауссов, минимум по области, максимум по области, медианный, адаптивный медианный и т.п. Пример: медианный и адаптивный медианный фильтры по области 7×7 пикселей.



Удаление гармонических шумов частотными фильтрами. Изображение, спектр, маска фильтра, итог.



Спасибо за внимание!

mailto

eddy@sao.ru

edward.emelianoff@gmail.com