Компьютерная обработка результатов измерений

Лекция 6. Анализ временных рядов. Фурье– и Вейвлет–анализ

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН
Лаборатория обеспечения наблюдений

29 марта 2021 года

1. Аппроксимация и интерполяция
2. Модель ARMA
3. Преобразования Лапласа, Z–преобразования
4. Фурье–анализ
5. Вейвлет–анализ

Аппроксимация и интерполяция

Аппроксимация. Некоторую функцию $f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$ требуется приближенно заменить некоторой функцией $g(x)$ так, чтобы отклонение $g(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим.

Точечная (интерполяция, среднеквадратичное приближение и т.п.) и непрерывная аппроксимации.

Интерполяция является частным случаем аппроксимации, позволяющем вычислить промежуточные значения дискретной функции.

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n.$$

Аппроксимация и интерполяция

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n.$$

Выбирая первые N членов ряда Тейлора получаем разные виды интерполяции. Линейная:

$$f_n(x) \approx y_n + (x - x_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

Ньютона (для равноотстоящих x, $h = x_{n+1} - x_n$):

$$f_n^k(x) \approx y_n + q \Delta y_n + \frac{1(1-q)}{2!} \Delta^2 y_n + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!} \Delta^k y_n,$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$, Δ^i – конечные разности ($\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, …, $\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$).

Сплайн — кусочная полиномиальная функция, которая на заданном отрезке может принимать очень простую форму, в то же время имея гибкость и гладкость.

Степенной сплайн

Набор полиномов степени k со следующими ограничениями:

- сплайны должны совпадать в узловых точках с задающей функцией: $p_n(x_n) = f(x_n)$;
- предыдущий сплайн должен переходить в следующий в точках сшивания, $p_n(x_n) = p_{n+1}(x_n)$;
- все производные до $f^{(k-1)}$ должны быть непрерывными и гладкими: $p_n^i(x_n) = p_{n+1}^i(x_n)$ для $i = \overline{1, k-1}$;

$n-1$ полином степени k имеют $(k+1)(n-1) = (k+1)n - k - 1$ свободных коэффициентов. Данные ограничения дают нам $n + (n-2)\cdot k = (k+1)n - 2k$ уравнений. Чтобы получить еще $k-1$ уравнений, нужны дополнительные условия. Чем больше k, тем тяжелей. Поэтому обычно дальше $k=3$ не идут.

B–сплайн

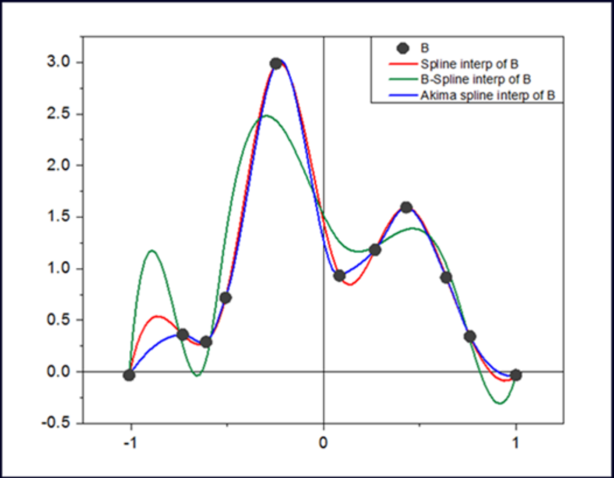
Базисные сплайны менее подвержены влиянию изменения отдельных точек данных (изменение одной вершины B–сплайна степени k ведет к изменению лишь $k+1$ соседних сплайнов). При этом, однако, теряются точные интерполяционные свойства: $p_n(x_n) \neq f(x_n) \Longrightarrow$ снижается влияние шумов (B–сплайн проходит только через первый и последний узлы, повышаем степень — улучшаем сглаживание данных). Количество узлов: $n \geqslant k+1$.

Сплайны Акимы

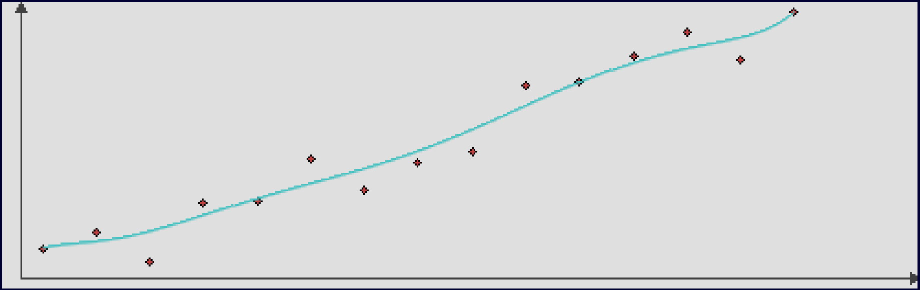
Также кубические. Устойчивы к осцилляциям. Локальность (окрестность из 5–6 точек) — существенно более быстрое разложение.

Кривые Безье

Параметрические полиномиальны кривые, проходящие через опорны точки только в начале и конце области определения.



3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1
0
1
B
Spline interp of B
B-Spline interp of B
Akima spline interp of B



Интерполяция кривой Безье

Модель ARMA (авторегрессия и скользящее среднее)

Авторегрессия

Процесс авторегрессии выражается уравнением

$$x_k = \mathfrak{C} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{k-i} + \varepsilon_k, \qquad \text{где } \mathfrak{C} \text{ – константа, } \varepsilon \text{ – шум.}$$

Процесс будет стационарным, лишь если φ_i заключены в определенном диапазоне, что не приведет к негораниченному росту x_k.

Скользящее среднее

$$x_k = \mathfrak{C} + \varepsilon_k - \sum_{i=1}^{n} \theta_i \varepsilon_{k-i}, \qquad \text{объект – сумма ошибок.}$$

Модель ARMA (авторегрессия и скользящее среднее)

ARMA

$$x_k = \mathfrak{C} + \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{k-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{k-i} \qquad \text{— процесс ARMA(p,q).}$$

Для определения порядков p и q может применяться, например, автокорреляция и частичная автокорреляция, ЧАКФ. Для нахождения коэффициентов — метод наименьших квадратов и т.п.
В ЧАКФ из переменных вычисляется их регрессия (удаляются линейные зависимости):

$$PACF(k) = corr(x_{t+k} - x_{t+k}^{k-1}, x_t - x_t^{k-1}),$$

$$x_t^{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_{t+k-i} \qquad \text{— СЛАУ.}$$

Преобразование Лапласа

В линейной теории управления аналогами преобразований Фурье выступают преобразования Лапласа и Z–преобразования.
Для комплексного переменного s преобразование Лапласа определяется так:

$$F(s) = \mathfrak{L}\left(f(t)\right)(s) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt.$$

Использование преобразований Лапласа имеет тот смысл, что управляющая функция $f(t)$ чаще всего является чисто действительной, а ее состояние в момент времени $t < 0$ не определено или же не интересует исследователя.

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(F(s)\right) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\gamma-\omega}^{\gamma+\omega} \mathrm{e}^{st}\,F(s)\,ds,$$

где γ определяет область сходимости $F(s)$.

Преобразование Лапласа

Связь с преобразованием Фурье

$$\mathcal{F}(F) \equiv F(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i u x}\,dx$$

$$\mathfrak{L}\left(f(t)\right)(2\pi u) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i u t}\,dt = \mathcal{F}\left(f(t)\right), \qquad f(t) = 0\Big|_{t<0}.$$

Лаплас $\to$ Фурье: $s \to 2\pi i u$ $\Rightarrow$ расширение свойств ПФ на ПЛ.
Сведение линейных диф. уравнений к алгебраическим $\Rightarrow$ теория управления:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(s) = s^1\,\mathfrak{L}\left(f(t)\right)(s) - f(0) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(s) = s^n\,\mathfrak{L}\left(f(t)\right) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0).$$

Преобразование Лапласа

Передаточная функция

$i(t)$ — входной сигнал управляющей системы, $o(t)$ — выходной сигнал; $I(s) = \mathfrak{L}(i)$, $O(s) = \mathfrak{L}(o)$. **Передаточная функция** с нулевыми начальными условиями:

$$T(s) = \frac{O(s)}{I(s)}.$$

$T(s)$ описывает динамику системы, совершенно отвлекаясь от ее внутреннего функционирования.

$$o(t) = \mathfrak{L}^{-1}(T \cdot I).$$

Преобразование Лапласа, примеры

Функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases} \qquad F(p) = \int\limits_0^\infty \eta(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{1}{s}, \quad \Re(s) > 0.$$

Экспонента

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t(s-1)}\,dt = \left.\frac{\mathrm{e}^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-1}, \quad \Re(s) > 1;$$

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{1}{s-\lambda}, \quad \Re(s) > \lambda.$$

Преобразование Лапласа, примеры

sin, cos

$$\int\limits_0^\infty \sin\alpha t\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{i\alpha t}-\mathrm{e}^{-i\alpha t}}{2i}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2},$$

$$\int\limits_0^\infty \cos\alpha t\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{i\alpha t}+\mathrm{e}^{-i\alpha t}}{2i}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}.$$

sh, ch

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}\,\alpha t\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2},$$

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{ch}\,\alpha t\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{s}{s^2-\alpha^2}.$$

Преобразование Лапласа, примеры

Диф. уравнения

Решить задачу Коши $x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Вычислим преобразование Лапласа (учитывая, что все н.у. нулевые):

$$s^3F(s) + sF(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

Обратное преобразование:

$$x(t) = t - \sin t.$$

Преобразование Лапласа, примеры

Конденсатор

Ток $i = C\frac{du}{dt}$, Лаплас: $I(s) = C(sU(s) - u(0))$. Отсюда $U(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u(0)}{s}$. Комплексное сопротивление $Z(s) = \left.\frac{U(s)}{I(s)}\right|_{u(0)=0}$. Импеданс конденсатора: $Z = \frac{1}{sC}$.

Индуктивность

$u = L\frac{di}{dt}$, $U(s) = L(sI(s) - i(0))$, $Z(s) = \left.\frac{U(s)}{I(s)}\right|_{i(0)=0}$, $Z = sL$.

Преобразование Лапласа, примеры

Общая передаточная функция

Рассмотрим диф. уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t).$$

При нулевых начальных условиях его преобразование Лапласа:

$$Y(s)\sum a_i s^i = X(s)\sum b_j s^j, \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} X(s).$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}.$$

Корни b_i – **нули** передаточной функции, корни a_i – ее **полюса**.

Преобразование Лапласа, примеры

Переходная характеристика

ПХ — реакция системы на ступенчатую функцию (Хевисайда):

$$Y(s) = \frac{1}{s} W(s).$$

Основные виды: апериодическая (монотонная) – плавное возрастание или затухание с постоянным знаком производной; периодическая колебательная – бесконечное количество раз смены знака производной с постоянным периодом; колебательная апериодическая – период смены знака производной непостоянен, его количество конечно.

Для последовательных звеньев $W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s)$. У параллельных суммирующих звеньев $W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)$.

Обратная связь: $Y = W_1 X_1$, $X_1 = X \pm X_2 = X \pm W_2 W_1 X_1$, $X_1 = X \pm X_1 W_1 W_2$

$$X_1 = \frac{X}{1 \mp W_1 W_2}, \quad Y = \frac{W_1 X}{1 \mp W_1 W_2}, \quad W = \frac{W_1}{1 \mp W_1 W_2}.$$

Z–преобразования (преобразования Лорана)

Являются дискретными аналогами преобразований Лапласа.
Z–преобразование дискретного сигнала $\mathrm{i} = i_k$, где $k = 0, \ldots, \infty$, имеет следующий вид:

$$I(z) \equiv \mathcal{Z}\left(\mathrm{i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} i_k(t) z^{-k},$$

$$i_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(I\right) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C I(z) z^n dz,$$

где C – контур, охватывающий область сходимости Z.

Отклик на сдвиг:

$$\mathcal{Z}\left(\mathrm{i}(t + n\Delta t)\right) = z^n \, \mathcal{Z}\left(\mathrm{i}(t)\right).$$

Связь с преобразованием Лапласа ($t \ll \Delta T$):

$$\mathfrak{L}\left(\mathrm{i}(t)\right)(s) = \mathcal{Z}\left(\mathrm{i}(t)\right) \mathrm{e}^{-st}.$$

Фурье–анализ

Ряд Фурье

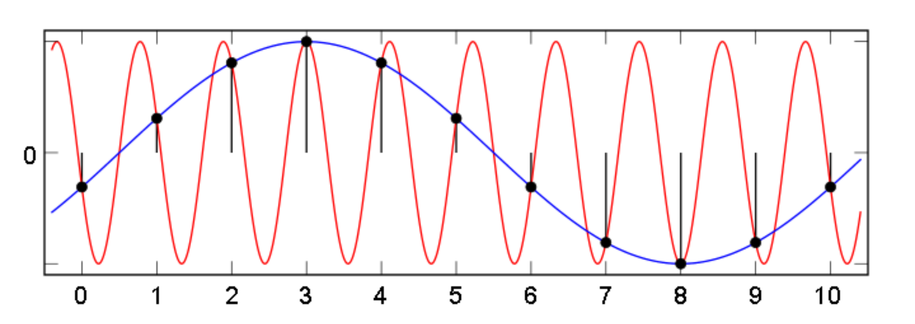
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(nx).$$

Коэффициенты a_n и b_n рассчитываются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Если $\quad S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a'_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{k} b'_n \sin(nx), \quad$ то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x) - S_k(x)\Big)dx = 0.$$

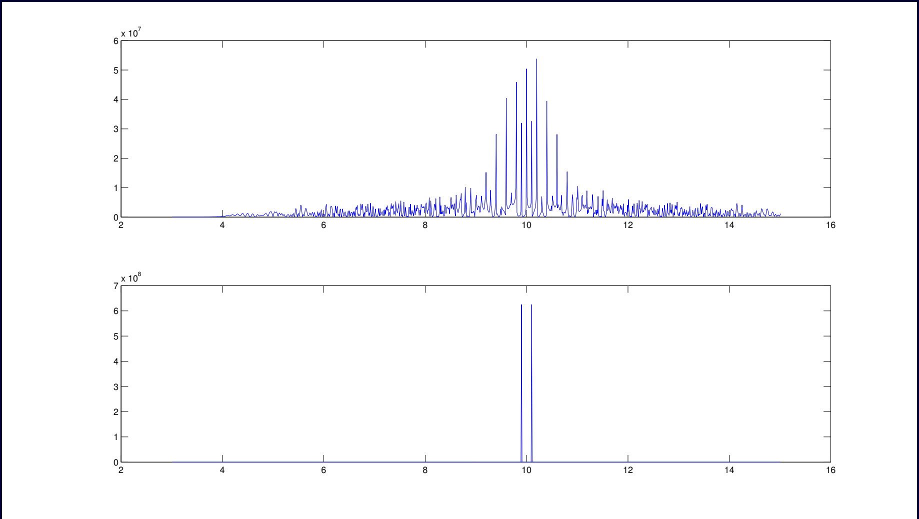


Ложная синусоида («aliasing», муар).

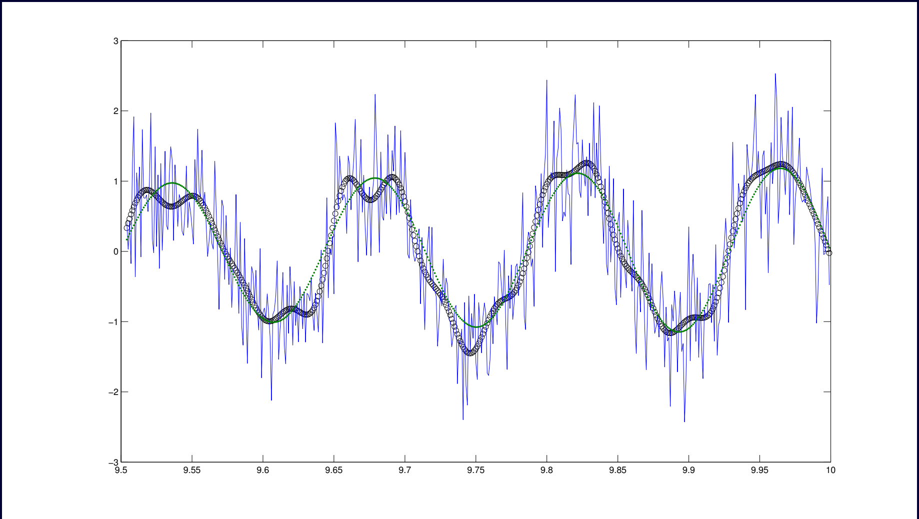
Фурье–анализ

Свойства

- свертка: $\mathcal{F}(f\cdot g)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$,
- дифференцирование: $\mathcal{F}(f^n)=(2\pi i\nu)^n\mathcal{F}(f)$,
- сдвиг: $\mathcal{F}\left(f(x-x_0)\right)=\mathrm{e}^{-2\pi i\nu x_0}\,\mathcal{F}(f)$,
- частотный сдвиг: $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{iat}\,f(t)\right)=F(2\pi\nu-a)$,
- масштабирование: $\mathcal{F}(\mathfrak{C}f)=\frac{1}{|\mathfrak{C}|}\mathcal{F}(f)\,(\nu/a)$,
- $\mathcal{F}\left(\delta(t)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,
- $\mathcal{F}(1)=\sqrt{2\pi}\delta(2\pi\nu)$,
- $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{iat}\right)=\sqrt{2\pi}\delta(2\pi\nu-a)$.



Спектры ЧМ (сверху) и АМ (снизу) сигналов, образованных из двух одинаковых гармонических сигналов



Фурье-фильтрация. Точками обозначен оригинальный сигнал, линией — зашумленный сигнал, кружками — отфильтрованный.

Вейвлет–анализ

Вейвлеты — класс функций, использующихся для пространственной и масштабируемой локализации заданной функции. Семейство вейвлетов может быть образовано из функции $\psi(x)$ (ее иногда называют «материнским вейвлетом»), ограниченной на конечном интервале. «Дочерние» вейвлеты $\psi^{a,b}(x)$ образуются из «материнского» путем сдвига и масштабирования.

Отдельный вейвлет можно определить как

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Тогда **базис вейвлетов** (*прямое вейвлет–преобразование*), соответствующих функции $f(x)$ определяется как

$$W_\psi(f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Вейвлет–анализ

Дискретное вейвлет–преобразование

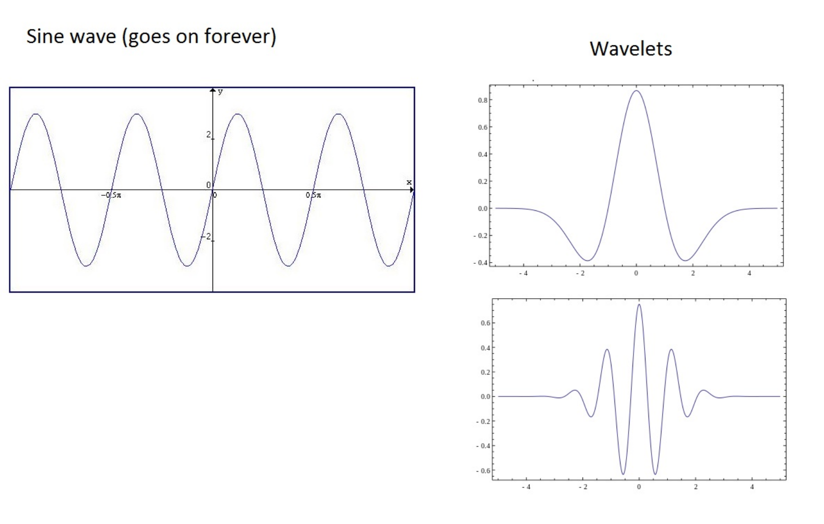
$a = a_0^m, \quad b = nb_0$, в этом случае

$$\psi_{m,n} = a_0^{-m/2}\psi\left(\frac{t - nb_0}{a_0^m}\right).$$

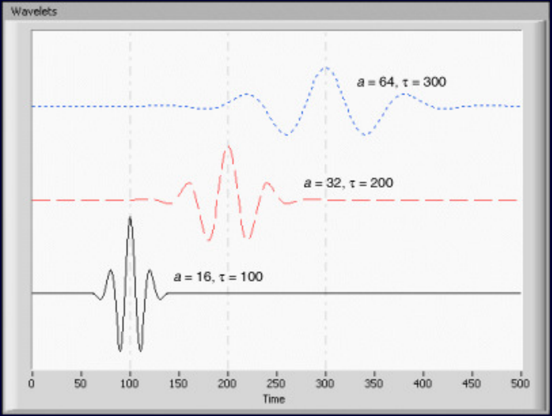
$$W_{m,n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\psi^*_{m,n}(t)\,dt.$$

$$x(t) = K_\psi \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{m,n}\psi_{m,n}(t),$$

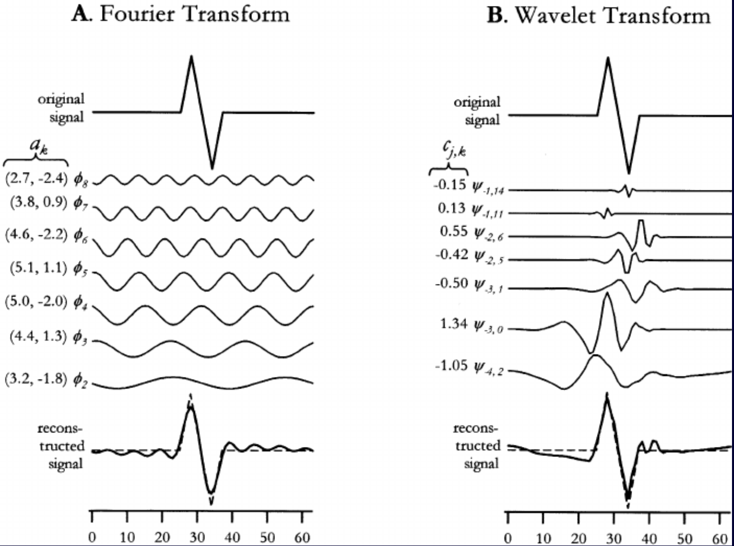
где K_ψ – постоянная нормировки.



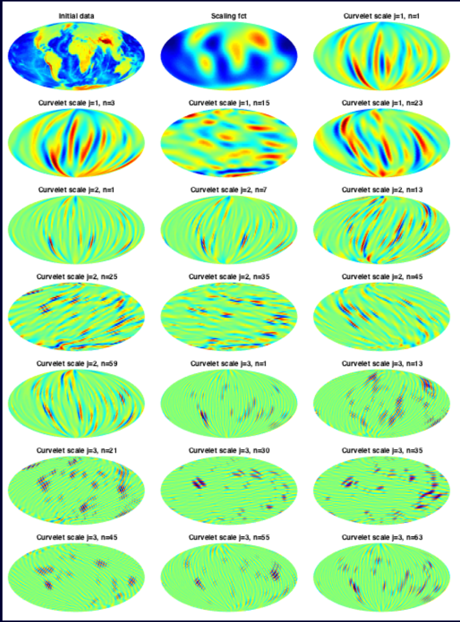
Локализация



Масштабирование



Фурье и вейвлеты


Initial data
Scaling fct
Curvelet scale j=1, n=1
Curvelet scale j=1, n=3
Curvelet scale j=1, n=15
Curvelet scale j=1, n=23
Curvelet scale j=2, n=1
Curvelet scale j=2, n=7
Curvelet scale j=2, n=13
Curvelet scale j=2, n=25
Curvelet scale j=2, n=35
Curvelet scale j=2, n=45
Curvelet scale j=2, n=59
Curvelet scale j=3, n=1
Curvelet scale j=3, n=13
Curvelet scale j=3, n=21
Curvelet scale j=3, n=30
Curvelet scale j=3, n=35
Curvelet scale j=3, n=45
Curvelet scale j=3, n=55
Curvelet scale j=3, n=63

Курвлеты

Спасибо за внимание!

mailto

eddy@sao.ru
edward.emelianoff@gmail.com