Практикум №2: статистика и вероятность

1 Введение в Octave

Справка: `help команда`.

Случайные числа: `rand(rows, cols)` — равномерное распределение, `randn(rows, cols)` — нормальное, `rande` — экспоненциальное, `randg` — гамма-распределение, `randp` — Пуассон.

1.1 Матрицы и векторы

Создание векторов: `A=[1 2 3]` или же `A=[1,2,3]`. Вектор-столбец: `A=[1 2 3]'` или же `A=[1;2;3]`. `A=[начзн.:<шаг:>конзн.]`.

Создание матриц: `A=[1 5 2; 4 1 0]`. Конкатенация: `A=[1:3]`, `B=[6:8]`, `C=[12:14]`; `D=[A;B;C]`. Или: `A=[1:3]'`, `B=[6:8]'`, `C=[12:14]'`; `D=[A B C]`. Конкатенация возможна и для векторов и матриц: `E=[(20:22)' (11:13)']`, `[D E]`. `X=[4 3 2]`, `Y=[9 8 7]`, `Z=[X Y]`.

Размер в элементах: `numel(A)`. Размер в байтах: `sizeof(A)`. Размерность: `size(A)`.

Посмотреть значение переменной можно, указав ее имя или же команду `disp(X)`.

Специальные матрицы: `eye(x)`, `ones(x)`, `zeros(x)`, `repmat(matrix, [ycount xcount])`, `magic(x)`. **Первая координата — Y!**

Список переменных: `whos`. Удалить переменные: `clear`.

Индексы — с единицы! Индексация: `X=magic(5)`, `X(1:2,3:5)`, `X(2:end,3:end)`, `X(:,3)`, `X(3,:)`, `magic(4)(:,1)`.

Матрицу — в столбец: `magic(4)(:)`.

Удаление элементов матриц и векторов: `vec=[1:10]`, `idx=[3,7,5]`, `vec[idx]=[]`; `X(:,[1,3])=[]`.

1.2 Матричные и векторные операции

Сложение, вычитание: `A+B`, `A-B`.

Транспонирование, сопряжение: `A'`. Степень (для квадратных матриц): `X^n`. **Отрицательная степень**: `A^(-1)==inv(A)`, но `A^(-2)==inv(A)^2`! **Поэлементные операции**: `A.(op)`. Умножение матриц: `A*B`, например,

```
A=[1 4 7; 8 5 2];
B=[4 5; 9 6; 3 1];
X=A*B
ans =
61   36
83   72
```

`A=[1 2; 3 4]`, `B=[50 60; 70 80]`. Матричное деление: `A/B` (`(A/B)*B==A`), эквивалентно AB^{-1}. «Левое» деление: `A\B` (`A*(A\B)==B`), эквивалентно $A^{-1}B$.

1.3 Графики

`x=[0:0.1:2*pi]`, `plot(sin(x))`.

Сохранить график: `print -dpdf plot.pdf`.

Гистограмма: `hist(x,N)`. Например,

```
x=rand(1,10000);
hist(x);
hist(x, 5);
x=randn(1,10000);
hist(x,20);
```

Графики двумерных функций. `[X,Y]=meshgrid(-5:0.1:5,-6:0.1:6);`, `Z=X.^2-4*Y.^2;`, `surf(X,Y,Z)`. `surfc(X,Y,Z)` — с изолиниями. `mesh(X,Y,Z)`.

Закрыть график: `close all` или же `close(fig)`. `P=figure(N);`. Выбор между текущим графиком для отображения: `figure(N)`. Например:

```
P1=figure(1); P2=figure(2);
mesh(X,Y,Z);
figure(1);
surfc(X,Y,Z);
close(P2);
```

`hold on/off` — дорисовать что-то на графике.

Но интерфейс Octave к gnuplot не сравнится с самим gnuplot (пример)!

Построим график плотности вероятности нормального распределения величины с $\overline{X} = -20$ и $\sigma_X = 20$: `x=[-70:30]; y=normpdf(x,-20,20);`.

1.4 Циклы, условия

Цикл `for`. `for x=1:10; printf("x=%d\n", x); endfor`.

```
X=[]; Y=[]; for x=1:3; A=dlmread(sprintf("for%02d", x));
> X=[X; A(:,1)]; Y=[Y; A(:,2)]; endfor
plot(X, Y, 'o')
```

Цикл `while`:

```
F=1; x=1; while F < 1e10; x+=1; F*=x; endwhile; printf("!%d=%g\n", x, F);
!14=8.71783e+10
```

Условия:

```
x = input("Enter value: ");
if(x < -5) printf("Less than -5\n")
>elseif (x > 5) printf("More than 5\n")
>else printf("Between -5 and 5\n")
>endif
```

1.5 m-файлы

Функции и скрипты. Функции: `checkX.m`.

Скрипты: `script.m`. Скрипт выполняется в глобальном пространстве! Пример (закомментировать `x=` в `script.m`):

```
clear
x = [-2*pi:0.1:2*pi];
script
```

Проверка переменной (и не только): `exist(name, type)`, скрипт `script_chk` (запустить с определенной `x` и после `clear`).

1.6 Статистика

Среднее: `mean(x)`. RMS: `std(x)`. Медиана: `median(x)`. Сумма: `sum(x)`. Кумулятивная сумма: `cumsum(x)`. Сортировка: `sort(x)`.

Минимум, максимум: `min(x)`, `max(x)`.

2 Примеры выполнения заданий

1. *Сгенерировать синусоиду на участке* $[0, 2\pi]$*, добавить к ней гауссов белый шум с амплитудой 10 дБ. Построить график.*

Сгенерируем синусоидальный сигнал на участке $[0, 2\pi]$ командами

```
x=[0:pi/50:2*pi]; y=sin(x);
```

Теперь добавим к сигналу гауссов белый шум с амплитудой 10 дБ относительно амплитуды сигнала:

```
y1=awgn(y,10,'measured'); plot(x, [y; y1])
```

Третий параметр (measured) обязателен, т.к. без него процесс добавления шума будет несколько иным (мощность сигнала будет считаться равной 0 дБ), можете проверить на синусоиде с амплитудой 10.

2. *Сгенерировать синусоиду с периодом* $\pi/5$ *на интервале* $[0, 20]$ *с амплитудной модуляцией пилообразной функцией с периодом 10.*

Для генерации синусоидального сигнала $y_0 = A\sin(2\pi t/T)$ с амплитудной модуляцией по закону $y_1 = f(t)$ необходимо перемножить эти две функции: $y = y_0 \cdot y_1$. Промодулируем синусоиду с периодом $\pi/5$ пилообразным сигналом с периодом 10 на интервале $x \in [0, 20]$. Для генерирования «пилы» используется функция `sawtooth`. Если задать ей один аргумент (вектор x), период будет равен 2π, а сигнал будет изменяться в интервале $[-1, 1]$. Чтобы задать смещение максимума, равное $a \cdot 2\pi$, необходимо указать: `y=sawtooth(x,a)`. Таким образом, чтобы получить «пилу» с интервалом сигнала в $[0, 1]$ и периодом 10, необходимо дать команду `y1=0.5+sawtooth(x*2*pi/10)/2;`. Следовательно, получить наш сигнал можно командой

```
y=sin(x*10).*(0.5+sawtooth(x*pi/5)/2);
```

(не забудьте про точку перед знаком умножения между функциями, иначе получите ошибку, т.к. Octave попытается перемножить два вектора–строки).

3. *На интервале $[0, 20]$ создать две синусоиды, сдвинутые друг относительно друга на 3 единицы. При помощи взаимно-корреляционной функции определить этот сдвиг.*

```
x=[0:0.05:20]; y=sin(x); y1=sin(x+3);
```

Попробуем определить, на сколько единиц сдвинут первый сигнал относительно второго. Для этого воспользуемся корреляционной функцией. Запишем `Corr=xcorr(y,y1);`. Корреляционная функция в данном случае имеет вдвое большую ширину, чем исходная, т.к. она получается путем последовательного сдвига второй функции относительно первой. Поэтому построим график командой `plot([-20:0.05:20],Corr)`. Воспользовавшись функцией увеличения можно увидеть, что ближайший к нулю максимум соответствует сдвигу одной функции относительно другой. В нашем случае сигнал был периодическим, поэтому при сдвигах на величины, превышающие половину периода, возникает ошибка, кратная полупериоду. Это необходимо учитывать в расчетах.

Поменяем сдвиг на 0.2 и посмотрим, как изменится график.

4. *Найдите сумму, разность, произведение и частное матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 7 & 11 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Найдите определители исходных и получившихся матриц (команда `det(A)`*)*

```
a=[4 12 8; 7 11 -1; 2 12 3];
b=[11 2 0; 0 3 0; 1 -1 12];
sum=a+b
dif=a-b
prod=a*b
div=a/b
det(a) ...
```

3 Задания для самостоятельного выполнения

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Найдите определители исходных и получившихся матриц (команда `det(A)`).
2. Найдите значение почленного, матричного и скалярного произведений векторов $a = (2, 5, 7)$ и $b = (11, 13, 17)$. Скалярное произведение найдите двумя способами: путем перемножения векторов и при помощи функции `dot(a,b)`. Найдите векторное произведение $a \times b$ при помощи функции `cross(a,b)`.
3. Постройте график нормального распределения на интервале $[0, 100]$ с математическим ожиданием 50 и дисперсией 100.
4. Получите сигнал с амплитудной модуляцией (из примера). Добавьте к нему гауссов белый шум с SNR 100, 50, 10 и 1 дБ. Постройте отдельно графики всех полученных сигналов. Можно ли сделать какой-либо вывод о виде сигнала при SNR=1? Как вы думаете, можно ли восстановить из него исходный сигнал?

5. Для полученного сигнала найдите следующие характеристики: математическое ожидание (`mean`), среднее квадратичное отклонение (`std`), медиану (`median`) и моду (`mode`). Найдите аналогичные величины для разности между зашумленным и оригинальным сигналом. Сравните полученные величины с теоретическими.
6. Попытайтесь определить сдвиг двух синусоид (из примера) при зашумлении:

   - только одной с уровнем сигнал/шум 1 дБ;
   - обеих с уровнем SNR=1 дБ;
   - одной с уровнем SNR=0.1 дБ;
   - обеих с уровнем SNR=0.1 дБ.

   Постройте один из сигналов с SNR=0.1 дБ. Можно ли определить его период? Можно ли определить период по автокорреляционной функции этого сигнала?