

Компьютерная обработка результатов измерений

Лекция 5. Системы уравнений

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН
Лаборатория обеспечения наблюдений

22 марта 2021 года



- 1 Системы уравнений
- 2 Степенные уравнения
- 3 Численное интегрирование и дифференцирование
- 4 Дифференциальные уравнения

Системы уравнений

Система линейных уравнений для n неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если существует вектор-столбец x , обращающий выражение $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ в тождество, говорят, что x является **решением** данной системы уравнений. $\det A \equiv |\mathbf{A}| \neq 0$.



Методы решений

$\delta = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$. Приближенные методы: $\min(\delta)$. Точные методы: $\delta = 0$.

Матричный метод

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Нахождение обратной матрицы:

- с помощью присоединенной: $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \Rightarrow (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$;
- $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$, присоединенная матрица $\text{adj } \mathbf{A}$ является транспонированной матрицей алгебраических дополнений $((-1)^{i+j} M_{ij}, M_{ij} - соответствующий дополнительный минор — определитель матрицы с вычеркнутыми i -й строкой и j -м столбцом)$.
- и т.д., и т.п.

Формулы Крамера: $x_j = |A_j|/|A|$, A_j получается из A заменой j -го столбца на \mathbf{b} .

Методы решений

Метод Гаусса

$$\mathbf{A}_d \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Прямой ход — преобразование к диагональной форме:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mm} & \beta_m \end{array} \right).$$

Обратный ход — последовательное нахождение x_m, x_{m-1}, \dots, x_1 .
 $N \propto n^3$ — прямой, $N \propto n^2$ — обратный ход.



Методы решений

Метод Зейделя

$$\mathbf{Bx}_{n+1} + \mathbf{Cx}_n = \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{x}_{n+1} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Cx}_n + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$



Методы решений

LU-метод

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1m} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$, находим \mathbf{y} , из $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ находим \mathbf{x} .

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}u_{sj}, & i \geq j; \\ u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}u_{sj} \right), & i < j. \end{cases}$$

LU-разложение возможно для матриц с преобладанием диагональных элементов

Методы решений

Разложение Холецкого

$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$, либо $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}$, где \mathbf{L} – нижняя треугольная матрица со строго положительными элементами на диагонали, \mathbf{U} – верхняя треугольная матрица. Разложение Холецкого всегда существует и единственно для любой симметричной (относительно главной диагонали) положительно-определенной матрицы (все диагональные миноры положительны).

$$\begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}^2}; \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is} l_{js} \right), \quad j < i. \end{cases}$$

Прямой и обратный ходы аналогичны LU-разложению.



Методы решений

Если A содержит m строк и n столбцов, то:

- $m = n$ квадратная матрица, возможно существование точного решения;
- $m < n$ недоопределенная система, решение возможно лишь в общем виде с по крайней мере $n - m$ свободных коэффициентов;
- $m > n$ переопределенная система, приближенное решение которой находится при помощи метода наименьших квадратов (в случае линейной зависимости строк данной системы может существовать и точное решение).



Методы решений

Метод наименьших квадратов ($m > n$)

$\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$, $S = \sum_i (\sum_j a_{ij}x_j - b_i)^2$, $\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0 \implies \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, где $c_{kj} = \sum_i a_{ik}a_{ij}$,
 $k, j = \overline{1, n}$, $d_k = \sum_i a_{ik}b_i$. Т.о. $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Метод простой итерации

$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}$, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_n + \mathbf{c}$.

Сложностью метода простой итерации при решении матриц больших размерностей является особое свойство таких матриц — существование *почти собственных значений*, λ : $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|$ при $\|\mathbf{x}\| \neq 0$.



Число обусловленности матрицы

Оценка ошибки решения

Пусть \mathbf{x}' – приближенное решение. Абсолютная и относительная ошибки: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ и $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/\|\mathbf{x}\|$. Нам известна невязка $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{r} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|A^{-1}\mathbf{r}\| \leq \|A^{-1}\| \|\mathbf{r}\|,$$

а т.к. $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$, $1/\|\mathbf{x}\| \leq \|A\|/\|\mathbf{b}\|$:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|\mathbf{r}\| \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Число обусловленности: $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Чем оно больше, тем больше флюктуации \mathbf{x} влияют на общее решение. У хорошо обусловленных матриц $K(A) \equiv 1$ (напр., ортогональные матрицы, у которых $A^T = A^{-1}$).



Степенные уравнения

Степенное уравнение имеет вид $p_n(x) = 0$, где $p_n(x)$ – полином n -й степени вида $p_n(x) = \sum_{i=0}^n C_n x^n$.

Методы решения

Точные – до третьей степени включительно (в общем случае) и итерационные:

бисекция деление пополам отрезка, где находится корень;

метод хорд замена полинома хордой, проходящей через точки $(x_1, p_n(x_1))$ и $(x_2, p_n(x_2))$;

метод Ньютона имеет быструю сходимость, но требует знакопостоянства $f'(x)$ и $f''(x)$ на выбранном интервале (x_1, x_2) .



Бисекция (дихотомия)



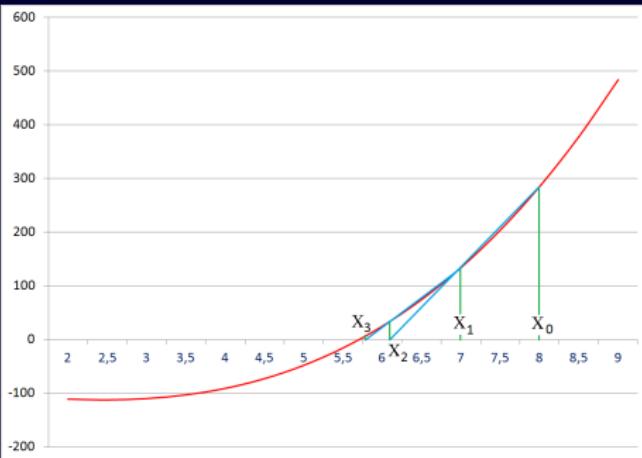
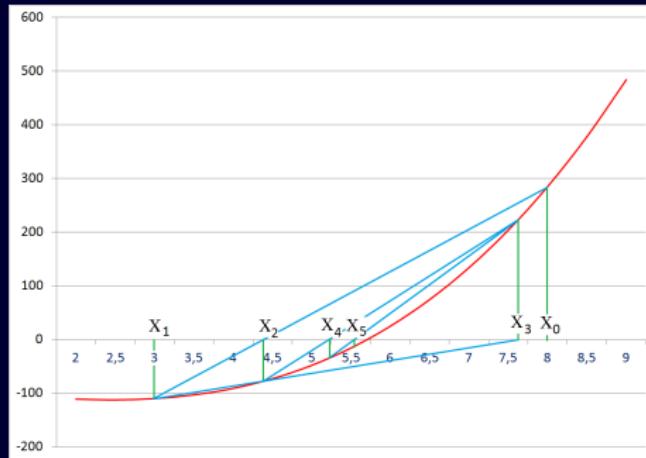
Отрезок делится вплоть до заданной точности $b_n - a_n \leq \varepsilon$, корень $x \approx (b_n + a_n)/2$.

Применяется и для поиска значений в упорядоченном ряду.



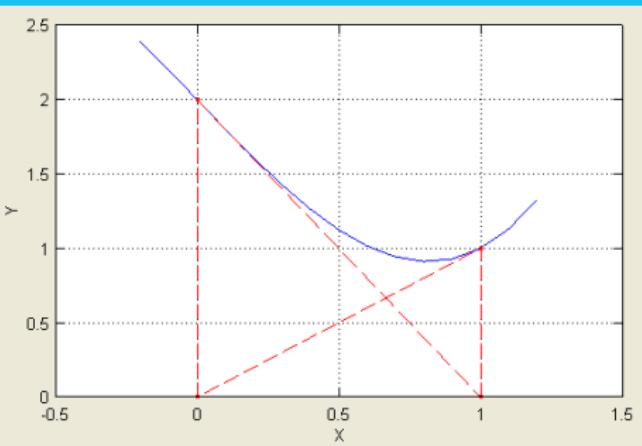
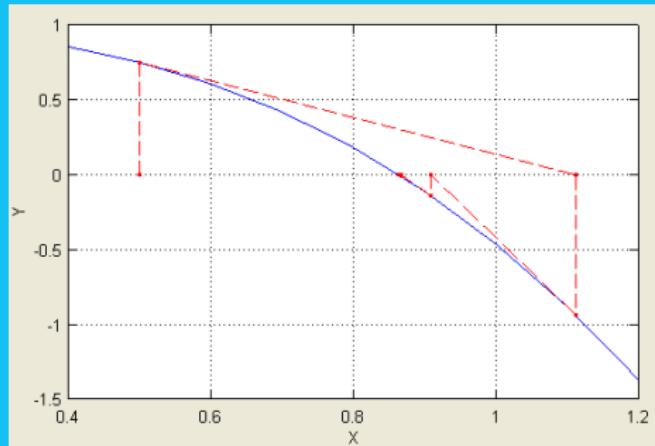
Метод хорд (секущих)

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}.$$



Метод Ньютона

$$x_{i+1} = x_i + \frac{y_i}{y'_i}.$$



Численное интегрирование

Для численного решения уравнения $I = \int_a^b f(x) dx$ наиболее популярны:

метод прямоугольников $I \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)[x_i - x_{i-1}]$;

метод трапеций $I \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}[x_i - x_{i-1}]$;

метод Симпсона $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) \implies$

$I \approx \frac{b-a}{6n} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) \right)$.

и многие другие.



Метод прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i);$$

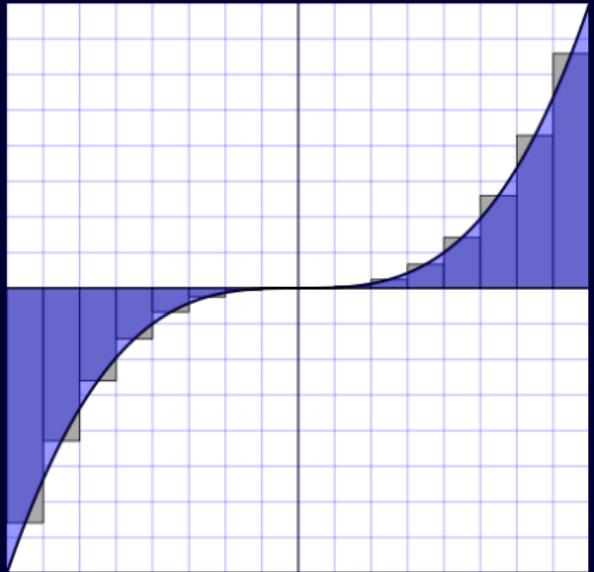
$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1});$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Для равномерных сеток:

$$h \sum_{i=0}^{n-1} f_i; h \sum_{i=1}^n f_i;$$

$$h \left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i + \frac{f_0 + f_n}{2} \right).$$



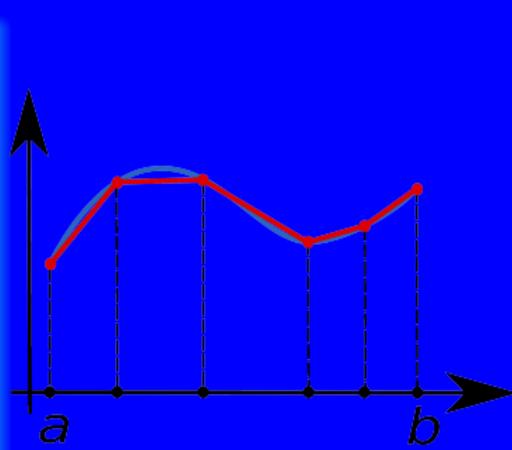
Метод трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Для равномерных сеток — формула Котеса:

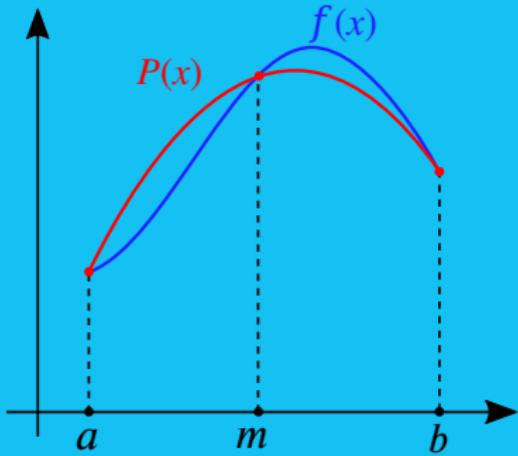
$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) + E_n(f),$$

$$E_n(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2, \xi \in [a, b].$$



Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$



Формула Котеса:

$$I \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + f(x_N) \right).$$

Численное дифференцирование

Аппроксимация функции интерполяционным многочленом (Ньютона, Стирлинга и т.п.), разделенные разности.

Аппроксимация многочленом

$$f(x) \approx P_N(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(r)}(x) \approx P_N^{(r)}(x).$$

Полином Ньютона:

$$P_N(x) = \sum_{m=0}^N C_x^m \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k f(k).$$

Полином Лагранжа:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N y_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

А также: интерполяция кубическими сплайнами, разложение по базису тригонометрических функций и т.п.

Разделенные разности

В нулевом приближении можно заменить производную $f^{(n)}$ разделенной разностью n -го порядка.

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}.$$

В частности:

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},$$
$$f(x_0; x_1; x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)} \dots$$

Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) порядка n задаются в виде функции $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Разделение переменных:

$$y' = f(x, y) \implies \varphi(y) dy = \psi(x) dx \implies y = y_0 + \int_0^x \psi(x) dx.$$

ОДУ второго порядка:

$$Ay'' + By' + Cy + Dx = 0.$$

Если $D \equiv 0$, а множители A, B и C — константы, имеем однородное ОДУ. $y = \mathfrak{C}_1 \exp(k_1 x) + \mathfrak{C}_2 \exp(k_2 x)$, где k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения $Ak^2 + Bk + C = 0$.



Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения в частных производных (ЧДУ) для функции $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеют вид

$$f(y, x_1, \dots, x_n; \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots; \dots; \frac{\partial^m y}{\partial x_1^m}, \dots) = 0.$$

Однако, наиболее часто встречаются ЧДУ первого порядка для функции двух переменных $z = z(x, y)$ вида

$$f(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0.$$

Дифференциальные уравнения

Нелинейные дифференциальные уравнения содержат некоторые производные функции y не как простые множители, а как аргументы функций (чаще всего — степенных), например: $(y'')^3 - \sin y' = \operatorname{tg}(xy)$. Обычные физические задачи никогда не приводят к таким уравнениям, однако, и их решения вполне можно найти при помощи численных методов.

Методы решения

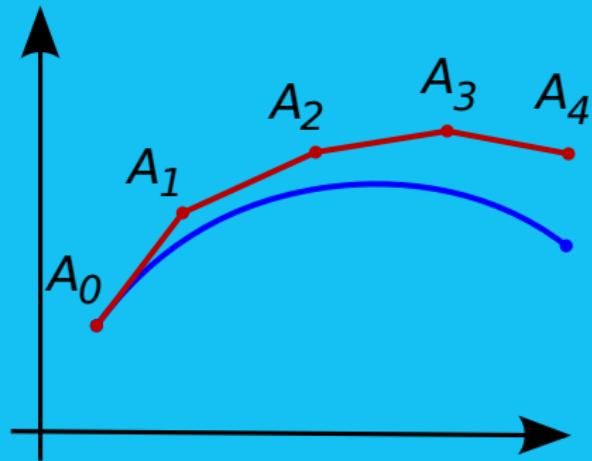
Рунге–Кутты, Эйлера, Адамса, конечных разностей и т.п.

Дифференциальные уравнения высших порядков сводят путем замены переменных к системе ОДУ первого порядка.

Метод Эйлера

Аппроксимация интегральной кривой кусочно-линейной функцией. Задача Коши в простейшем виде: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y|_{x=x_0} = y_0$. Решение ищется на интервале $(x_0, b]$.

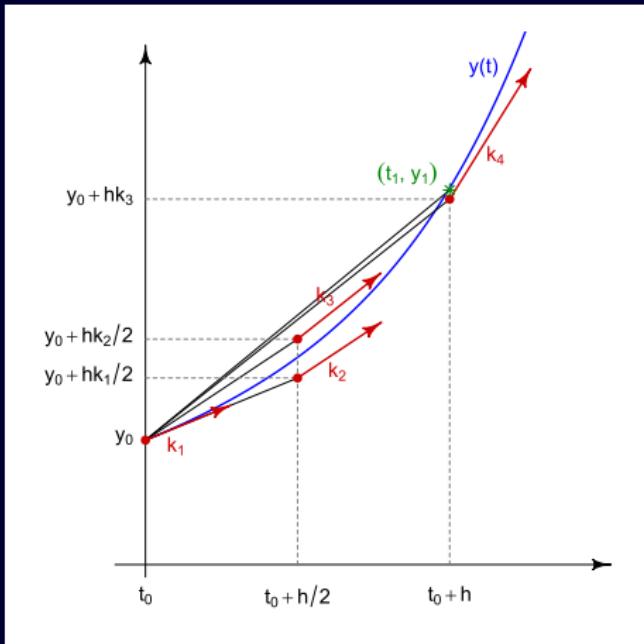
$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$



Метод Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{где}$$

$k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + h/2, y_n + h/2k_1)$, $k_3 = f(x_n + h/2, y_n + h/2k_2)$,
 $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$ (h – шаг сетки по x).



Спасибо за внимание!

[mailto](mailto:)

eddy@sao.ru

edward.emelianoff@gmail.com